OBZORY

4/2000 (29)

MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2000(29)

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

Adresa redakcie:

Matematická časť:
Katedra algebry a teórie čísel MFF UK, Mlynská dolina, 842 15 Bratislava

Fyzikálna časť:
Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra

Objednávky a predplatné vybavuje:
Redakcia OMFI, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 4/2000 (29)

Od paraboly k inverznej funkcii

Jozef Doboš

Abstract: The aim of the paper is to present the usefulness of graphical analysis applied on solving of equations.

Začneme nasledujúcou úlohou zo zbierky [5], str. 53.

Príklad 1. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnicu

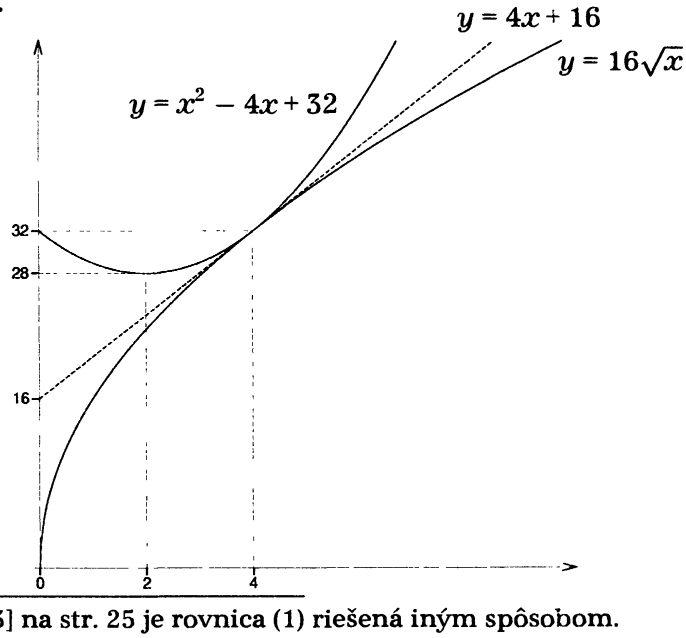
$$x^2 - 4x + 32 = 16\sqrt{x}\,. \tag{1}$$

Riešenie.[1]) Ľahko sa overí, že pre každé reálne číslo x platí

$$x^2 - 4x + 32 \geqslant 4x + 16 \geqslant 16\sqrt{x}\,. \tag{2}$$

Skutočne, každú z týchto nerovností možno upraviť do tvaru $(x-4)^2 \geqslant 0$. Teda v obidvoch nerovnostiach nastáva rovnosť iba v prípade $x = 4$. Jediným koreňom rovnice (1) je $x = 4$. □

Uvedenému riešeniu lepšie porozumieme, keď si urobíme grafickú analýzu úlohy.



[1]V knihe [3] na str. 25 je rovnica (1) riešená iným spôsobom.

Paraboly, ktoré sú nakreslené na obrázku, sú grafmi funkcií

$$y = x^2 - 4x + 32\,,$$
$$y = 16\sqrt{x}\,.$$

Ako vidíme, majú spoločnú dotyčnicu v bode $A = [4\,,\,32]$, ktorej rovnica je

$$y = 4x + 16\,.$$

Na základe uvedenej grafickej analýzy môžeme formulovať hypotézu, ktorá je vyjadrená nerovnosťami (2). Samozrejme, teraz by mal nasledovať analytický dôkaz, ktorý je naznačený vo vyššie prezentovanom riešení.

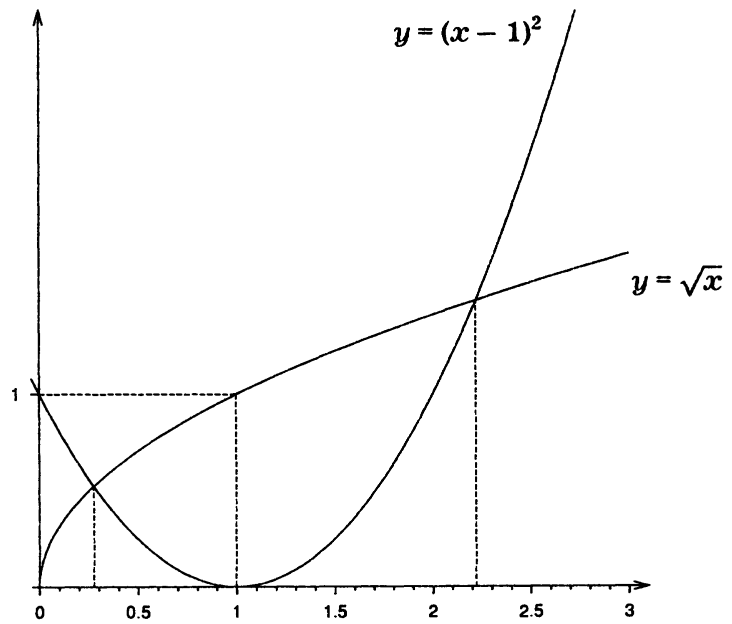
Pri takýchto rovniciach zvyčajne postupujeme klasickým spôsobom, t.j. prevedieme danú rovnicu na algebraickú rovnicu štvrtého stupňa. Niekedy pritom vystačíme s elementárnymi prostriedkami[2], **ale nie vždy**, ako ukazuje nasledujúci príklad (pozri [1], str. 50).

Príklad 2.

Riešte v $\mathbb{R}$ rovnicu

$$(x - 1)^2 = \sqrt{x}\,. \tag{3}$$

Riešenie. Grafickou analýzou zistíme, že rovnica (3) má dva reálne korene. Jeden sa nachádza medzi číslami 0.2 a 0.3, druhý medzi číslami 2.2 a 2.3.



[2] Pozri str. 44–47 v knihe [1], príp. článok [2].

Ich presné vyjadrenie môžeme nájsť riešením rovnice

$$(x-1)^4 = x\,,$$

ktorá je dôsledkom rovnice (3). Použitím metódy vysvetlenej v knihe [7] na str. 118 dostávame

$$x_{1,2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\lambda_0} \pm \sqrt{\sqrt{\frac{\lambda_0^2}{4}+1} - \frac{\lambda_0}{4}}\,,\ \text{kde } \lambda_0 = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{283}{108}}+\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{283}{108}}-\frac{1}{2}}\,.$$

Praktická hodnota takýchto vyjadrení je však zanedbateľná. □

Teraz sa zastavíme pri jednej úlohe zo zbierky [4], str. 86.

Príklad 3.

Riešte v $\mathbb{R}$ rovnicu

$$x = a + \sqrt{a+\sqrt{x}}\,,\ \text{kde } a > 1\,. \tag{4}$$

Riešenie. Položme

$$f(x) = a + \sqrt{x}\,. \tag{5}$$

Potom rovnicu (4) môžeme vyjadriť v tvare

$$x = f(f(x))\,. \tag{6}$$

Všimnime si, že každé riešenie rovnice

$$x = f(x) \tag{7}$$

je aj riešením rovnice (6). Najskôr teda vyriešime rovnicu

$$x = a + \sqrt{x}\,, \tag{8}$$

ktorej jediným reálnym koreňom je

$$x_0 = \frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2}\,. \tag{9}$$

Ukážeme, že x_0 je aj jediným koreňom rovnice (4). Skutočne, keď si uvedomíme, že pre každé $x \geqslant 0$ platí

$$x - a - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{a+\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\sqrt{x} + \sqrt{a+\sqrt{x}}\right),$$

rovnicu (4) môžeme upraviť na tvar

$$(x-a-\sqrt{x})\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a+\sqrt{x}}}\right)}_{>0} = 0\,.$$

Tým sme ukázali, že rovnice (4) a (8) sú ekvivalentné. □

Poznámka. Zaujímavá je aj diskusia vzhľadom na parameter a.

$a < -\frac{1}{4}$	rovnica (4) nemá riešenie
$a = -\frac{1}{4}$	rovnica (4) má jediné riešenie $x_0 = \frac{1}{4}$
$-\frac{1}{4} < a \leqslant 0$	rovnica (4) má dve riešenia $x_{1,2} = \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}}\right)^2$
$0 < a$	rovnica (4) má jediné riešenie $x_0 = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}\right)^2$

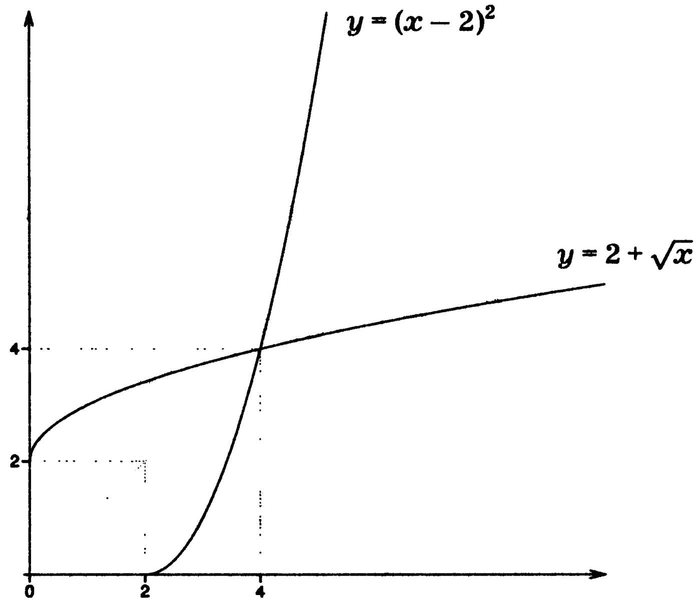
Všimnime si, že za predpokladu existencie inverznej funkcie f^{-1} k funkcii f môžeme rovnicu (6) prepísať do symetrického tvaru

$$f^{-1}(x) = f(x)\,, \tag{10}$$

ktorý je vhodnejší na grafickú analýzu úlohy.
Takáto situácia nastáva aj v príklade č. 3, kde funkcia f určená vzťahom (5) má inverznú funkciu definovanú predpisom

$$y = (x - a)^2\,,\ \ x \geqslant a\,.$$

Môžeme to využiť pri grafickej analýze úlohy. Pre $a = 2$ máme nasledujúci obrázok.



Ako vidíme, pre $a = 2$ má rovnica (4) jediný koreň $x_0 = 4$.

V príklade č. 3 boli rovnice (6) a (7) ekvivalentné. Nasledujúca úloha[3] ukazuje, že vždy to tak nemusí byť.

Príklad 4.

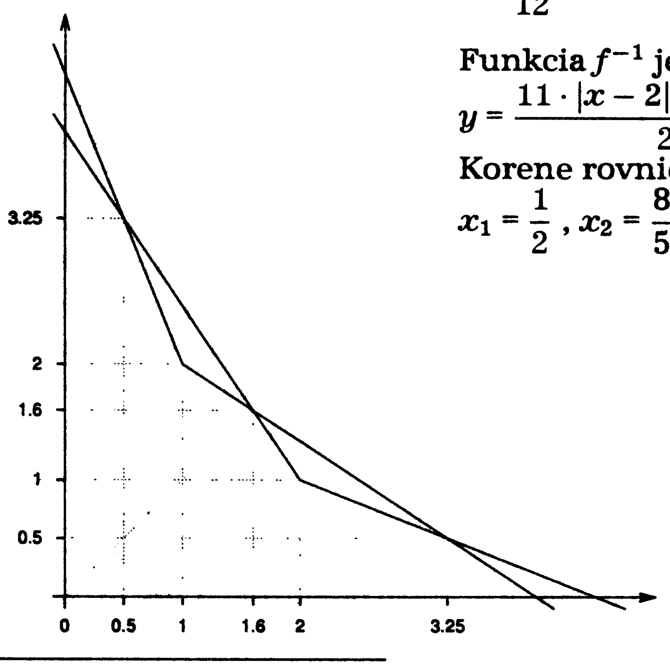
Rovnica
$$x = a^{a^x} \tag{11}$$
má pre $a = \frac{1}{16}$ tri korene, z ktorých dva $\left(x_1 = \frac{1}{2} \text{ a } x_2 = \frac{1}{4}\right)$ nie sú koreňmi rovnice
$$x = a^x \, . \tag{12}$$

Všimnime si, že rovnice (11) a (12) majú tvar (6) a (7). Naozaj, stačí položiť $f(x) = a^x$. Prechodom k inverznej funkcii môžeme rovnicu (11) prepísať do symetrického tvaru
$$\log_a x = a^x \, . \tag{13}$$

Pri hľadaní koreňa rovnice (12), t.j. tretieho koreňa rovnice (11), musíme použiť približné metódy. Napriek jej zdanlivej jednoduchosti nedokážeme túto rovnicu riešiť analyticky. Ukážeme si úlohu, ktorá tento nedostatok nemá.

Príklad 5.

Riešte v $\mathbb{R}$ rovnicu $f^{-1}(x) = f(x)$ pre funkciu
$$f(x) = \frac{11\,|x-1| - 19x + 43}{12} \, .$$



Funkcia f^{-1} je určená predpisom $y = \frac{11 \cdot |x-2| - 19x + 58}{20}$.
Korene rovnice $f^{-1}(x) = f(x)$ sú, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{8}{5}$, $x_3 = \frac{13}{4}$.

[3] Jej podrobnú analýzu možno nájsť v článku [6].

Nasledujúce dve úlohy riešte samostatne. Ukazujú, že rovnica $f^{-1}(x) = f(x)$ môže mať aj viac koreňov (pritom v obidvoch prípadoch rovnica $x = f(x)$ má jediný koreň).

Úloha 1. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnicu $f^{-1}(x) = f(x)$ pre funkciu

$$f(x) = \frac{22\,|x-1| + 5\,|x-4| - 33x + 66}{24}.$$

Úloha 2. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnicu $f^{-1}(x) = f(x)$ pre funkciu

$$f(x) = \frac{30\,|x+1| + 22\,|x-1| + 5\,|x-4| - 63x + 36}{24}.$$

Literatúra

[1] Башмаков, М. И., *Уравнения и неравенства*, Наука Москва, 1971.

[2] Doboš, J. *Poznámka o rovniciach*, Rozhledy matematicko-fyzikální, 70 (1992), 193–196.

[3] Doboš, J. *Matematické etudy. Príručka pre uchádzačov o štúdium na ekonomickej univerzite*, MANACON, Prešov, 1999, ISBN 80-85668-82-3.

[4] Моденов, П. С. *Сборник задач по специальному курсу элементарной математики*, Высшая школа Москва, 1960.

[5] Peller, F. - Šáner, V. - Eliáš, J. - Pinda, Ľ. *MATEMATIKA. Podklady na prijímacie testy pre uchádzačov o štúdium* Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava, 1999, ISBN 80-225-1103-X.

[6] Виленкин, Н. *Три точки, три точки, три точки,...* Квант, 1, (1980), 48–50.

[7] Schwarz, Š. *Základy náuky o riešení rovníc*, Vydavateľstvo SAV, Bratislava, 1967.

e-mail autora: dobos@tuke.sk

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
4/2000(29)

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci
s vydavateľstvom PROTON s.r.o. s finančným prispením
Ministerstva školstva Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Beloslav Riečan, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Jaroslav Guričan, Mária Rakovská
Technická a grafická úprava: Mária Benešová, Vladimír Kutnár
Všetky príspevky prešli odbornou recenziou

Podávanie novinových zásielok povolené
Riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 4377/93-P zo dňa 8.12.93

ISSN 1335-4981

OBSAH

FROM CONTENTS