OBZORY

56/1999

MATEMATIKY FYZIKY a INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 56/1999

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky, fyziky a informatiky na základných a stredných školách

Adresa redakcie:

Matematická časť:

Katedra algebry a teórie čísel MFF UK, Mlynská dolina, 842 15 Bratislava

Fyzikálna časť:

Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra

Objednávky a predplatné vybavuje:

Redakcia OMFI, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 94974 Nitra

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 56/1999

Úlohy o periodických funkciách

Jozef Doboš

Začneme nasledujúcou úlohou zo zbierky [1]:

Úloha 1. Zistite, či funkcia $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ je periodická a ak áno, určte periódu tejto funkcie.

Najskôr si musíme vyjasniť, čo budeme rozumieť pod pojmom perióda. V učebnici [2], ktorá sa používa na stredných školách, sa na str. 27 dozvieme, že

„Funkcia f sa nazýva periodická práve vtedy, keď existuje také číslo $p > 0$, že pre každé $k \in Z$ platí:

(a) Ak $x \in D(f)$, potom aj $x + kp \in D(f)$,

(b) $f(x + kp) = f(x)$.

Číslo p sa volá *perióda funkcie f*.

Ak v množine čísel, ktoré sú periódami periodickej funkcie f, existuje najmenšie kladné číslo, nazývame ho *najmenšia perióda funkcie f*."

Avšak v zbierke úloh [1] sa na str. 88 píše

„Ak existuje najmenšie kladné číslo p, pre ktoré platia uvedené vlastnosti, nazývame ho *periódou funkcie f*."

Autori zbierky [1] teda pod pojmom perióda rozumejú najmenšiu periódu.

Riešenie úlohy 1. Definičným oborom danej funkcie je celá reálna os, preto podmienka (a) je splnená. Hľadanú periódu označme symbolom p. Potom pre každé reálne číslo x platí

$$\sin\left(3 \cdot (x + p) + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \tag{*}$$

Špeciálne, pre $x = -\frac{\pi}{6}$ dostávame

$$\sin\left(3 \cdot \left(-\frac{\pi}{6} + p\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(3 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \sin\left(-\frac{\pi}{2}+3p+\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin(3p) &= 0 \\ 3p &= k\pi, \quad k\in Z \\ p &= \frac{k\pi}{3}, \quad k\in Z \end{aligned}$$

Pretože hľadáme najmenšiu periódu, do úvahy prichádza číslo $p = \frac{\pi}{3}$. Ukážeme však, že nie je periódou. Naozaj, dosadením $x = -\frac{\pi}{9}$ a $p = \frac{\pi}{3}$ do rovnosti (*) dostávame

$$\begin{aligned} \sin\left(3\cdot\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(3\cdot\left(-\frac{\pi}{9}\right)+\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ -\frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

čo je spor. Nasledujúci výpočet ukazuje, že už číslo $p = \frac{2\pi}{3}$ periódou je.

$$\begin{aligned} \sin\left(3\cdot\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\underbrace{3x+\frac{\pi}{2}}_{=u}+2\pi\right) &= \sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin(u+2\pi) &= \sin u \end{aligned}$$

Teda číslo $p = \frac{2\pi}{3}$ je najmenšou periódou danej funkcie.

Nasledujúca úloha (pozri [3]) ukazuje, že súčet dvoch periodických funkcií nemusí byť periodickou funkciou.

Úloha 2 Dokážte, že ak číslo a je iracionálne, tak funkcia $f(x) = \cos x + \cos ax$ nie je periodická.

Riešenie Predpokladajme, že funkcia f je periodická. Potom existuje číslo $p > 0$ také, že pre každé reálne číslo x platí

$$\cos(x+p) + \cos(ax+ap) = \cos x + \cos ax$$

Špeciálne, pre $x = 0$ dostávame $\cos p + \cos ap = 2$, čo je možné iba v prípade, že platí $\cos p = \cos ap = 1$. Teda musia existovať nenulové celé čísla

m , n také, že platí $p = 2m\pi$, $ap = 2n\pi$. Odtiaľ vyplýva, že číslo $a = \frac{n}{m}$ je racionálne, čo je spor. Tým sme dokázali, že funkcia f nie je periodická.

Dá sa ukázať, že súčet dvoch spojitých periodických funkcií s periódami p a q je periodickou funkciou práve vtedy, keď číslo $\frac{p}{q}$ je racionálne. Napriek tomu sa však periodičnosť sčítancov istým spôsobom prejavuje na vlastnostiach ich súčtu. Záujemcom o hlbšie štúdium tejto problematiky odporúčame knihu [4].
Zaujímavé úlohy o periodičnosti sa často vyskytujú v rôznych súťažiach.

Úloha 3. (Pozri [9].) Nech f je taká funkcia, že pre všetky reálne čísla x platí

$$f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}\cdot f(x)\,.$$

Dokážte, že funkcia f je periodická.

Riešenie. Podľa predpokladu pre každé reálne číslo x platí

$$\begin{aligned}
f(x+1) &= \sqrt{2}\cdot f(x) - f(x-1)\\
f(x+2)+f(x) &= \sqrt{2}\cdot f(x+1) = \sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}\cdot f(x) - f(x-1))\\
f(x+2)+f(x) &= 2\cdot f(x) - \sqrt{2}\cdot f(x-1)\\
f(x+2) &= f(x) - \sqrt{2}\cdot f(x-1)\\
f(x+4) &= f(x+2) - \sqrt{2}\cdot f(x+1) = f(x) - \sqrt{2}\cdot(f(x-1)+f(x+1))\\
f(x+4) &= -f(x)\\
f(x+8) &= -f(x+4) = f(x)
\end{aligned}$$

Tým sme dokázali, že funkcia f má periódu $p = 8$. Konkrétnym príkladom takejto funkcie je

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$$

Teraz uvedieme niekoľko veľmi podobných úloh (bez riešení). Dúfame, že budú slúžiť ako vhodný materiál pre prácu s nadanými študentami.

Úloha 4. (Pozri [5] str. 24., príp. [7] str. 7.) Je dané kladné číslo a a reálna funkcia f definovaná pre všetky reálne čísla. Predpokladajme, že pre každé x platí

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}\,.$$

a) Dokážte, že funkcia f je periodická.
b) Nájdite pre $a = 1$ príklad nekonštantnej funkcie s uvedenými vlastnosťami.

Úloha 5. (Pozri [6], str. 144.) Nech funkcia f je definovaná na celej množine reálnych čísel a vyhovuje pre nejaké $k \neq 0$ vzťahu

$$f(x+k) \cdot (1 - f(x)) = 1 + f(x) \, .$$

Dokážte, že f je periodická.

Úloha 6. (Pozri [8].) Nech funkcia f spĺňa pre všetky reálne čísla x podmienku

$$f(x) = f(x-a) \cdot f(x+a) \, ,$$

kde a je nenulová konštanta. Dokážte, že

a) funkcia f je periodická,

b) $f(x-5a) \cdot f(x+5a) = f(x-7a) \cdot f(x+7a)$.

c) Nájdite periódu funkcie f.

K dôležitým periodickým funkciám patrí funkcia $f(x) = x - [x]$, kde symbolom $[x]$ označujeme celú časť reálneho čísla x (pozri [2], str. 27). V nasledujúcej úlohe[1] uvidíme zaujímavú vlastnosť istej postupnosti vytvorenej pomocou tejto funkcie.

Úloha 7. Uvažujme postupnosť definovanú pre každé $n \in N$ predpisom

$$a_n = \alpha n - [\alpha n] \, ,$$

kde α je dané iracionálne číslo. (Pritom symbolom $[x]$ označujeme celú časť reálneho čísla x.) Ukážte, že v každom intervale $I \subset \langle 0 \, , \, 1 \rangle$ sa nachádzajú nejaké členy tejto postupnosti.

Riešenie. Nech $I = (c \, , \, d)$, kde $0 < c < d < 1$. Nech $m \in N$ je také, že $\frac{1}{m} < d - c$. Ukážeme, že existujú $r \, , \, s \in \{1 \, , \, 2 \, , \ldots , \, m+1\}$, $r < s$, také, že platí

$$|a_s - a_r| < \frac{1}{m} \, .$$

Pretože číslo α je iracionálne, každé a_n leží v niektorom z intervalov

$$I_1 = \left(0 \, , \, \frac{1}{m}\right) , \, I_2 = \left(\frac{1}{m} \, , \, \frac{2}{m}\right) , \, I_3 = \left(\frac{2}{m} \, , \, \frac{3}{m}\right) , \ldots , \, I_m = \left(\frac{m-1}{m} \, , \, \frac{m}{m}\right) .$$

Podľa Dirichletovho princípu možno $m+1$ bodov rozdeliť do m intervalov len tak, že v niektorom z nich sú aspoň dva body. Označme ich a_r , a_s. Potom ich vzdialenosť je menšia ako dĺžka tohto intervalu, teda

[1] Táto úloha je náročnejšia, vhodná pre prácu v matematickom krúžku.

$$|a_s - a_r| = |\alpha(s-r) - \underbrace{([\alpha s] - [\alpha r])}_{\in Z}| < \frac{1}{m}. \tag{1}$$

Teraz ukážeme, že existuje $n \in N$ s vlastnosťou

$$0 < \alpha n - [\alpha n] < \frac{1}{m}. \tag{2}$$

Z definície celej časti reálneho čísla dostávame

$$[\alpha s] < \alpha s < [\alpha s] + 1,$$

$$[\alpha r] < \alpha r < [\alpha r] + 1,$$

odkiaľ

$$\underbrace{[\alpha s] - [\alpha r] - 1}_{\in Z} < \alpha(s-r) < \underbrace{[\alpha s] - [\alpha r] + 1}_{\in Z}$$

Rozlíšime dva prípady

$$[\alpha(s-r)] = [\alpha s] - [\alpha r], \tag{3}$$

$$[\alpha(s-r)] = [\alpha s] - [\alpha r] - 1. \tag{4}$$

Položme $x = \alpha(s-r)$. V prípade (3) podľa (1) platí

$$0 < x - [x] < \frac{1}{m}.$$

Teda (2) platí (stačí položiť $n = s - r$). V prípade (4) podľa (1) platí

$$0 < 1 + [x] - x < \frac{1}{m},$$

odkiaľ máme

$$1 - \frac{1}{m} < x - [x] < 1.$$

Položme

$$k = \left[\frac{1 - \frac{1}{m}}{1 - x + [x]}\right] + 1.$$

Nie je ťažké dokázať, že

$$k \in N, \quad k \geq m, \quad 0 < kx - [kx] < \frac{1}{m}.$$

Tým sme ukázali, že (2) platí (stačí položiť $n = k(s-r)$).
Teraz použijeme (2) k tomu, aby sme našli $l \in N$ také, že $c < a_l < d$. Nech teda $n \in N$ je také, že

$$0 < \alpha n - [\alpha n] < \frac{1}{m}.$$

Položme

$$t = \left[\frac{c}{\alpha n - [\alpha n]}\right] + 1 .$$

Nie je ťažké dokázať, že

$$t \in N, \quad c < t\alpha n - [\alpha t n] < d .$$

Tým sme ukázali, že existuje $l \in N$ také, že $c < a_l < d$ (stačí položiť $l = tn$).

Naše úvahy zakončíme podobnou úlohou o funkcii sínus, ktorú možno riešiť ako dôsledok úlohy číslo 7. (Porovnaj [10], str. 107.)

Úloha 8. Uvažujme postupnosť definovanú pre každé $n \in N$ predpisom

$$a_n = \sin n .$$

Ukážte, že v každom intervale $I \subset \langle 0 , 1\rangle$ sa nachádzajú nejaké členy tejto postupnosti.

Literatúra

[1] Peller, F. - Šáner, V. - Eliáš, J. - Pinda, Ľ.: *Matematika, Podklady na prijímacie testy pre uchádzačov o štúdium.* Ekonóm Bratislava, 1998

[2] Odvárko, O. - Ryšánková, M.: *Matematika pre 2. ročník gymnázia, Funkcie II.* SPN Bratislava, 1990

[3] Dynkin, J. B.: *Matematické hlavolamy.* Alfa Bratislava, 1976

[4] Левитан, Б. М.: *Почти-периодические функции.* Государственное издательство технико-теоретической литературы Москва, 1953

[5] Horák, K. a kol.: *Úlohy mezinárodných matematických olympiád.* SPN Praha, 1986

[6] Васильев, Н. Б. – Гутенмахер, В. Л. – Раббот, Ж. М. – Тоом, А. Л.: *Заочные математические олимпиады.* Наука Москва, 1986

[7] Рожков, В. И. – Курдеванидзе, Г.-Д. – Панфилов, И. Г.: *Сборник задач математических олимпиад.* Издательство Университета дружбы народов, Москва, 1987

[8] Квант 3 (1978), стр. 18

[9] Квант 11 (1980), стр. 22

[10] Hecht, T. - Sklenáriková, Z.: *Metódy riešenia matematických úloh.* SPN Bratislava, 1992

Adresa autora:
RNDr. Jozef Doboš, KM SjF TU, Letná 9, 042 00 Košice. e-mail: dobos@ccsun.tuke.sk

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
56/1999

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci
s vydavateľstvom PROTON s.r.o. s finančným prispením
Ministerstva školstva Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Beloslav Riečan, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Jaroslav Guričan, Mária Rakovská
Technická a grafická úprava: Mária Benešová, Vladimír Kutnár
Všetky príspevky prešli odbornou recenziou

Podávanie novinových zásielok povolené
Riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 4377/93-P zo dňa 8.12.93

OBSAH

FROM CONTENTS