

56/1999

OBSOBY

MATEMATIKY

FYZIKY a

INFORMATIKY

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 56/1999

Časopis pre teóriu a praktické otázky vyučovania matematiky,
fyziky a informatiky na základných a stredných školách

Vedeckí redaktori:

matematickej časti: Beloslav R i e č a n

fyzikálnej časti: Daniel K l u v a n e c

Výkonní redaktori:

matematickej časti: Jaroslav G u r i č a n

fyzikálnej časti: Mária R a k o v s k á

Redakčná rada:

Matematická a informatická časť:

Hynek Bachratý, Viera Blahová, Pavol Černek, Jozef Doboš, Martin Gavallec, Tomáš Hecht, Karel Horák, Vladimír Jodas, Mária Kmetová, Viera Kyselicová, Marian Macko, Peter Maličký, Božena Mihalíková, Anna Michalcová, Gustáv Nagy, Zdeněk Půlpán, Mária Sadloňová, Bohuš Sivák, Robert Szelepcsényi, Ladislav Topoľský, János Tóth, Jan Vinař, Michal Winczer, Viktor Witkovský

Fyzikálna časť:

Mária Barbierová, Michal Blaško, Anna Jankovychová, Arpád Kecskés, Oto Klostermann, Dalibor Krupa, Václav Koubek, Stanislav Ondrejka, Juraj Šebesta, Eva Tomanová, Ivo Volf

Adresa redakcie:

Matematická časť:

Katedra algebry a teórie čísel MFF UK, Mlynská dolina, 842 15 Bratislava

Fyzikálna časť:

Katedra fyziky, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra

Objednávky a predplatné vybavuje:

Redakcia OMFI, FPV UKF, Tr. A. Hlinku 1, 94974 Nitra

Úlohy o periodických funkciách

Jozef Doboš

Začneme nasledujúcou úlohou zo zbierky [1]:

Úloha 1. Zistite, či funkcia $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ je periodická a ak áno, určte periódu tejto funkcie.

Najskôr si musíme vyjasniť, čo budeme rozumieť pod pojmom perióda. V učebnici [2], ktorá sa používa na stredných školách, sa na str. 27 dozvieme, že

„Funkcia f sa nazýva periodická práve vtedy, keď existuje také číslo $p > 0$, že pre každé $k \in \mathbb{Z}$ platí:

(a) Ak $x \in D(f)$, potom aj $x + kp \in D(f)$,

(b) $f(x + kp) = f(x)$.

Číslo p sa volá *perióda funkcie f* .

Ak v množine čísel, ktoré sú periódami periodickej funkcie f , existuje najmenšie kladné číslo, nazývame ho *najmenšia perióda funkcie f* .“

Avšak v zbierke úloh [1] sa na str. 88 píše

„Ak existuje najmenšie kladné číslo p , pre ktoré platia uvedené vlastnosti, nazývame ho *periódou funkcie f* .“

Autori zbierky [1] teda pod pojmom perióda rozumejú najmenšiu periódu.

Riešenie úlohy 1. Definičným oborom danej funkcie je celá reálna os, preto podmienka (a) je splnená. Hľadanú periódu označme symbolom p . Potom pre každé reálne číslo x platí

$$\sin\left(3 \cdot (x + p) + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \quad (*)$$

Špeciálne, pre $x = -\frac{\pi}{6}$ dostávame

$$\sin\left(3 \cdot \left(-\frac{\pi}{6} + p\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(3 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 3p + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(3p) = 0$$

$$3p = k\pi, \quad k \in Z$$

$$p = \frac{k\pi}{3}, \quad k \in Z$$

Pretože hľadáme najmenšiu periódu, do úvahy prichádza číslo $p = \frac{\pi}{3}$. Ukážeme však, že nie je periódou. Naozaj, dosadením $x = -\frac{\pi}{9}$ a $p = \frac{\pi}{3}$ do rovnosti (*) dostávame

$$\sin\left(3 \cdot \left(-\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(3 \cdot \left(-\frac{\pi}{9}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

čo je spor. Nasledujúci výpočet ukazuje, že už číslo $p = \frac{2\pi}{3}$ periódou je.

$$\sin\left(3 \cdot \left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\underbrace{3x + \frac{\pi}{2}}_{=u} + 2\pi\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(u + 2\pi) = \sin u$$

Teda číslo $p = \frac{2\pi}{3}$ je najmenšou periódou danej funkcie.

Nasledujúca úloha (pozri [3]) ukazuje, že súčet dvoch periodických funkcií nemusí byť periodickou funkciou.

Úloha 2 Dokážte, že ak číslo a je iracionálne, tak funkcia $f(x) = \cos x + \cos ax$ nie je periodická.

Riešenie Predpokladajme, že funkcia f je periodická. Potom existuje číslo $p > 0$ také, že pre každé reálne číslo x platí

$$\cos(x + p) + \cos(ax + ap) = \cos x + \cos ax$$

Špeciálne, pre $x = 0$ dostávame $\cos p + \cos ap = 2$, čo je možné iba v prípade, že platí $\cos p = \cos ap = 1$. Teda musia existovať nenulové celé čísla

m , n také, že platí $p = 2m\pi$, $ap = 2n\pi$. Odtiaľ vyplýva, že číslo $a = \frac{n}{m}$ je racionálne, čo je spor. Tým sme dokázali, že funkcia f nie je periodická.

Dá sa ukázať, že súčet dvoch spojitých periodických funkcií s periódami p a q je periodickou funkciou práve vtedy, keď číslo $\frac{p}{q}$ je racionálne. Napriek tomu sa však periodičnosť sčítancov istým spôsobom prejavuje na vlastnostiach ich súčtu. Záujemcom o hlbšie štúdium tejto problematiky odporúčame knihu [4].

Zaujímavé úlohy o periodičnosti sa často vyskytujú v rôznych súťažiach.

Úloha 3. (Pozri [9].) Nech f je taká funkcia, že pre všetky reálne čísla x platí

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2} \cdot f(x).$$

Dokážte, že funkcia f je periodická.

Riešenie. Podľa predpokladu pre každé reálne číslo x platí

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \sqrt{2} \cdot f(x) - f(x-1) \\ f(x+2) + f(x) &= \sqrt{2} \cdot f(x+1) = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} \cdot f(x) - f(x-1)) \\ f(x+2) + f(x) &= 2 \cdot f(x) - \sqrt{2} \cdot f(x-1) \\ f(x+2) &= f(x) - \sqrt{2} \cdot f(x-1) \\ f(x+4) &= f(x+2) - \sqrt{2} \cdot f(x+1) = f(x) - \sqrt{2} \cdot (f(x-1) + f(x+1)) \\ f(x+4) &= -f(x) \\ f(x+8) &= -f(x+4) = f(x) \end{aligned}$$

Tým sme dokázali, že funkcia f má periódu $p = 8$. Konkrétnym príkladom takejto funkcie je

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$$

Teraz uvedieme niekoľko veľmi podobných úloh (bez riešení). Dúfame, že budú slúžiť ako vhodný materiál pre prácu s nadanými študentami.

Úloha 4. (Pozri [5] str. 24., príp. [7] str. 7.) Je dané kladné číslo a a reálna funkcia f definovaná pre všetky reálne čísla. Predpokladajme, že pre každé x platí

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}.$$

- Dokážte, že funkcia f je periodická.
- Nájdite pre $a = 1$ príklad nekonštantnej funkcie s uvedenými vlastnosťami.

Úloha 5. (Pozri [6], str. 144.) Nech funkcia f je definovaná na celej množine reálnych čísel a vyhovuje pre nejaké $k \neq 0$ vzťahu

$$f(x+k) \cdot (1-f(x)) = 1+f(x).$$

Dokážte, že f je periodická.

Úloha 6. (Pozri [8].) Nech funkcia f spĺňa pre všetky reálne čísla x podmienku

$$f(x) = f(x-a) \cdot f(x+a),$$

kde a je nenulová konštanta. Dokážte, že

- funkcia f je periodická,
- $f(x-5a) \cdot f(x+5a) = f(x-7a) \cdot f(x+7a)$.
- Nájdite periódu funkcie f .

K dôležitým periodickým funkciám patrí funkcia $f(x) = x - [x]$, kde symbolom $[x]$ označujeme celú časť reálneho čísla x (pozri [2], str. 27). V nasledujúcej úlohe¹ uvidíme zaujímavú vlastnosť istej postupnosti vytvorenej pomocou tejto funkcie.

Úloha 7. Uvažujme postupnosť definovanú pre každé $n \in \mathbb{N}$ predpisom

$$a_n = \alpha n - [\alpha n],$$

kde α je dané iracionálne číslo. (Pritom symbolom $[x]$ označujeme celú časť reálneho čísla x .) Ukážte, že v každom intervale $I \subset (0, 1)$ sa nachádzajú nejaké členy tejto postupnosti.

Riešenie. Nech $I = (c, d)$, kde $0 < c < d < 1$. Nech $m \in \mathbb{N}$ je také, že $\frac{1}{m} < d - c$. Ukážeme, že existujú $r, s \in \{1, 2, \dots, m+1\}$, $r < s$, také, že platí

$$|a_s - a_r| < \frac{1}{m}.$$

Pretože číslo α je iracionálne, každé a_n leží v niektorom z intervalov

$$I_1 = \left(0, \frac{1}{m}\right), I_2 = \left(\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right), I_3 = \left(\frac{2}{m}, \frac{3}{m}\right), \dots, I_m = \left(\frac{m-1}{m}, \frac{m}{m}\right).$$

Podľa Dirichletovho princípu možno $m+1$ bodov rozdeliť do m intervalov len tak, že v niektorom z nich sú aspoň dva body. Označme ich a_r, a_s . Potom ich vzdialenosť je menšia ako dĺžka tohto intervalu, teda

¹Táto úloha je náročnejšia, vhodná pre prácu v matematickom krúžku.

$$|a_s - a_r| = |\alpha(s - r) - \underbrace{([\alpha s] - [\alpha r])}_{\in \mathbb{Z}}| < \frac{1}{m}. \quad (1)$$

Teraz ukážeme, že existuje $n \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou

$$0 < \alpha n - [\alpha n] < \frac{1}{m}. \quad (2)$$

Z definície celej časti reálneho čísla dostávame

$$[\alpha s] < \alpha s < [\alpha s] + 1,$$

$$[\alpha r] < \alpha r < [\alpha r] + 1,$$

odkiaľ

$$\underbrace{[\alpha s] - [\alpha r] - 1}_{\in \mathbb{Z}} < \alpha(s - r) < \underbrace{[\alpha s] - [\alpha r] + 1}_{\in \mathbb{Z}}$$

Rozlíšime dva prípady

$$[\alpha(s - r)] = [\alpha s] - [\alpha r], \quad (3)$$

$$[\alpha(s - r)] = [\alpha s] - [\alpha r] - 1. \quad (4)$$

Položme $x = \alpha(s - r)$. V prípade (3) podľa (1) platí

$$0 < x - [x] < \frac{1}{m}.$$

Teda (2) platí (stačí položiť $n = s - r$). V prípade (4) podľa (1) platí

$$0 < 1 + [x] - x < \frac{1}{m},$$

odkiaľ máme

$$1 - \frac{1}{m} < x - [x] < 1.$$

Položme

$$k = \left\lceil \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 - x + [x]} \right\rceil + 1.$$

Nie je ťažké dokázať, že

$$k \in \mathbb{N}, \quad k \geq m, \quad 0 < kx - [kx] < \frac{1}{m}.$$

Tým sme ukázali, že (2) platí (stačí položiť $n = k(s - r)$).

Teraz použijeme (2) k tomu, aby sme našli $l \in \mathbb{N}$ také, že $c < a_l < d$. Nech teda $n \in \mathbb{N}$ je také, že

$$0 < \alpha n - [\alpha n] < \frac{1}{m}.$$

Položme

$$t = \left[\frac{c}{\alpha n - [\alpha n]} \right] + 1 .$$

Nie je ťažké dokázať, že

$$t \in \mathbb{N}, \quad c < t\alpha n - [\alpha tn] < d .$$

Tým sme ukázali, že existuje $l \in \mathbb{N}$ také, že $c < a_l < d$ (stačí položiť $l = tn$).

Naše úvahy zakončíme podobnou úlohou o funkcii sínus, ktorú možno riešiť ako dôsledok úlohy číslo 7. (Porovnaj [10], str. 107.)

Úloha 8. Uvažujme postupnosť definovanú pre každé $n \in \mathbb{N}$ predpisom

$$a_n = \sin n .$$

Ukážte, že v každom intervale $I \subset \langle 0, 1 \rangle$ sa nachádzajú nejaké členy tejto postupnosti.

L i t e r a t ú r a

- [1] Peller, F. – Šáner, V. – Eliáš, J. – Pinda, L.: *Matematika, Podklady na prijímacie testy pre uchádzačov o štúdium*. Ekonóm Bratislava, 1998
- [2] Odvárko, O. – Ryšánková, M.: *Matematika pre 2. ročník gymnázia, Funkcie II*. SPN Bratislava, 1990
- [3] Dynkin, J. B.: *Matematické hlavolamy*. Alfa Bratislava, 1976
- [4] Левитан, Б. М.: *Почти-периодические функции*. Государственное издательство технико-теоретической литературы Москва, 1953
- [5] Horák, K. a kol.: *Úlohy mezinárodných matematických olympiád*. SPN Praha, 1986
- [6] Васильев, Н. Б. – Гутенмахер, В. Л. – Раббот, Ж. М. – Тоом, А. Л.: *Заочные математические олимпиады*. Наука Москва, 1986
- [7] Рожков, В. И. – Курдеванидзе, Г.-Д. – Панфилов, И. Г.: *Сборник задач математических олимпиад*. Издательство Университета дружбы народов, Москва, 1987
- [8] Квант 3 (1978), стр. 18
- [9] Квант 11 (1980), стр. 22
- [10] Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: *Metódy riešenia matematických úloh*. SPN Bratislava, 1992

Adresa autora:

RNDr. Jozef Doboš, KM SJF TU, Letná 9, 042 00 Košice. e-mail: dobos@ccsun.tuke.sk

Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Matematický ústav SAV
Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa

OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
56/1999

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v spolupráci
s vydavateľstvom PROTON s.r.o. s finančným príspevím
Ministerstva školstva Slovenskej republiky
Vedeckí redaktori: Beloslav Riečan, Daniel Kluvanec
Výkonní redaktori: Jaroslav Guričan, Mária Rakovská
Technická a grafická úprava: Mária Benešová, Vladimír Kutnár
Všetky príspevky prešli odbornou recenziou

Podávanie novinových zásielok povolené
Riaditeľstvom pôšt Bratislava
č.j. 4377/93-P zo dňa 8.12.93

OBSAH

49. ročník matematickej olympiády	1
Matematická olympiáda na základných školách	2
Matematická olympiáda na stredných školách	10
Jozef D o b o š : Úlohy o periodických funkciách	19
Ján D e g r o, Lubomír Š n a j d e r : Teleprojekt Ekobiofyzika	25
Ivan Č e r v e ň : STN ISO 31-4 Teplo	33
Ivan Č e r v e ň : STN ISO 31-5 Elektrina a magnetizmus	36
Ivan Č e r v e ň : STN ISO 31-5 Svetlo a príbuzné elektromagnetické žiarenia	39
Texty úloh 1. kola 41. ročníka fyzikálnej olympiády, (šk.r. 1999 - 2000), kategória A	42
Texty úloh 1. kola 41. ročníka fyzikálnej olympiády (šk.r. 1999 - 2000), kategória E a Archimediáda	47
Kalendár 41. ročníka fyzikálnej olympiády (šk. r. 1999 - 2000) v Slovenskej republike	52
INFORMÁCIE	
Jasná 1998 - alebo zavedená značka má 30 rokov (Tatiana Gavalcová)	53
Uznesenie zjazdu Jednoty slovenských matematikov a fyzikov (Nitra 1. - 3. júl 1999)	59
Ústredný výbor Jednoty slovenských matematikov a fyzikov zvolený na obdobie r. 1999 - 2002	62
Vyznamenania JSMF udelené Zjazdom JSMF 1999	63
Celoštátne kolo v jubilejnom 40. ročníku fyzikálnej olympiády (Mária Rakovská)	67
30. medzinárodná fyzikálna olympiáda (Padova 18. - 27. 7. 1999) (Lubomír Mucha)	70

FROM CONTENTS

49th Year of Mathematics Olympiad	1
Mathematics Olympiad for the Primary Schools	2
Mathematics Olympiad for the Secondary Schools	10
Jozef Doboš: Problems on Periodical Functions	19
Ján Degro, Lubomír Šnajder: Teleproject Ecobiophysics	12
Ivan Červeň: STN ISO 31-4 Quantities and units - Part 4: Heat	33
Ivan Červeň: STN ISO 31-5 Quantities and units - Part 5: Electricity and Magnetism	36
Ivan Červeň: STN ISO 31-6 Quantities and units - Part 6: Light and Related	39
Texts of the Problems of 1st Cycle of 41th Year of Physics Olympiad (Schoolyear 1999 - 2000), Category A	42
Texts of the Problems of 1st Cycle of 41th Year of Physics Olympiad (Schoolyear 1999 - 2000), Category E and Archimediada	47