ROZHLEDY

matematicko-fyzikální

5–6
1992

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY

ROČNÍK 70, 1992
CENA 9,00 Kčs

ROZHLEDY
matematicko
-fyzikální

OBSAH

Poznámka o rovniciach

Doc. RNDr. JOZEF DOBOŠ, CSc., Technická univerzita, Košice

Pri riešení iracionálnych rovníc sa môžeme stretnúť s algebraickými rovnicami vyšších stupňov. Budeme to ilustrovať na príklade (pozri [4]):

$$\text{„Riešte v } \mathbb{R} \text{ rovnicu} \quad x^2 + \sqrt{x+5} = 5.\text{“} \tag{1}$$

Umocnením a jednoduchými úpravami ju prevedieme na rovnicu:

$$x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0, \tag{2}$$

ktorá však s rovnicou (1) nie je ekvivalentná. Preto budeme musieť previesť skúšku, ktoré z koreňov rovnice (2) vyhovujú rovnici (1).

Úlohu nájsť všetky korene algebraickej rovnice s celočíselnými koeficientami môžeme v niektorých prípadoch zjednodušiť. Napríklad poznanie racionálnych koreňov takejto rovnice nám umožňuje znížiť jej stupeň (postupným delením tejto rovnice odpovedajúcimi koreňovými činiteľmi). Pri hľadaní racionálnych koreňov používame nasledujúcu vetu (pozri napr. [1]): „Nech rovnica

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \tag{3}$$

kde a_0, $a_n \neq 0$, ktorej koeficienty sú celé nesúdeliteľné čísla, má racionálny koreň $\frac{r}{s}$ (r, s celé nesúdeliteľné). Potom číslo r je deliteľom koeficienta a_0 a číslo s je deliteľom koeficienta a_n.“

Použitím tejto vety ľahko zistíme, že rovnica (2) nemá racionálne korene. Napriek tomu možno rovnicu (2) riešiť elementárnymi prostriedkami.

Všimnime si, že ak rovnica (3) s celočíselnými koeficientami (aspoň druhého stupňa) má aspoň jeden racionálny koreň, potom ju možno upraviť na ekvivalentný tvar

$$P(x) \cdot Q(x) = 0, \tag{4}$$

kde $P(x)$ a $Q(x)$ sú polynómy (aspoň prvého stupňa) s celočíselnými koeficientami.

Na príklade rovnice (2) ukážeme, že na tvar (4) možno upraviť aj niektoré rovnice nemajúce racionálne korene. Polynómy $P(x)$ a $Q(x)$ budeme hľadať metódou neurčitých koeficientov:

$$x^4 - 10x^2 - x + 20 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d). \tag{5}$$

Roznásobením pravej strany a porovnaním koeficientov pri jednotlivých mocninách x dostávame sústavu rovníc

$$\begin{aligned} a + c &= 0, \\ ac + b + d &= -10, \\ ad + bc &= -1, \\ bd &= 20. \end{aligned} \tag{6}$$

Z poslednej rovnice sústavy (6) vyplýva, že čísla b a d treba hľadať medzi deliteľmi čísla 20. Za b postupne dosadzujeme čísla 1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5. Riešiteľnú sústavu dostaneme pre $b = -4$:

$$\begin{aligned} a + c &= 0, \\ ac &= -1, \\ -5a - 4c &= -1. \end{aligned}$$

Vypočítané hodnoty potom sú $a = 1$, $c = -1$, $d = -5$. Teda rovnicu (2) môžeme napísať v tvare

$$(x^2 + x - 4)(x^2 - x - 5) = 0.$$

Jej korene sú

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, \quad x_3 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}, \quad x_4 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}.$$

Dosadením sa môžeme presvedčiť, že riešením rovnice (1) sú iba čísla x_1 a x_4. Pre ilustráciu prevedieme skúšku pre x_1. Dosadením $a = 9$, $b = 64$ do vzorca

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2}\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b}}$$

(pozri [2], str. 11), dostávame identitu

$$\sqrt{17} + 1 = \sqrt{2}\sqrt{9 + \sqrt{17}},$$

ktorú použijeme v nasledujúcich úpravách:

$$x_1^2 + \sqrt{x_1 + 5} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} + \frac{\sqrt{9 + \sqrt{17}}}{\sqrt{2}} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} + \frac{\sqrt{17} + 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 5.$$

Teraz zhrnieme použitý postup pre rovnice štvrtého stupňa tvaru

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0, \tag{7}$$

kde a_1, a_2, a_3, a_4 sú celé čísla.

Rozklad ľavej strany rovnice (7) hľadáme v tvare

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \tag{8}$$

Roznásobením pravej strany rovnosti (8) a porovnaním odpovedajúcich si koeficientov dostávame sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} a + c &= a_1, \\ ac + b + d &= a_2, \\ ad + bc &= a_3, \\ bd &= a_4. \end{aligned} \tag{9}$$

Číslo b hľadáme medzi deliteľmi čísla a_4. Postupným dosadzovaním takto získaných hodnôt do sústavy (9) dostávame (po úprave) lineárne sústavy rovníc, ktoré vieme riešiť.

Nasledujúci príklad ukazuje, že tento postup možno použiť aj za slabších predpokladov — čísla a, c v (5) nemusia by celé.

Príklad. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnicu

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0. \tag{10}$$

Riešenie. Sústava (9) má v tomto prípade tvar

$$\begin{aligned} a + c &= -1, \\ ac + b + d &= -3, \\ ad + bc &= 1, \\ bd &= 1. \end{aligned}$$

Pre $b = -1$ dostávame $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $c = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $d = -1$. Teda rovnicu (10) možno upraviť na tvar

$$\left(x^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}x - 1\right)\left(x^2 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}x - 1\right) = 0.$$

Jej korene sú

$$x_{1,2} = \frac{1+\sqrt{5} \pm \sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4}, \quad x_{3,4} = \frac{1-\sqrt{5} \pm \sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4}$$

Hľadanie rozkladov tvaru (8) možno použiť v niektorých úlohách na integrovanie racionálnych lomených funkcií, napr.

$$\int \frac{2x^3 - 7x^2 + 12x - 10}{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 12}\,\mathrm{d}x$$

(pozri napr. [3], str. 148, pr. 801). Na záver poznamenajme, že aj keď sa uvedeným spôsobom nedá riešiť každá rovnica štvrtého stupňa s celočíselnými koeficientami (napr. $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0$), jeho jednoduchosť nás oprávňuje odporúčať jeho používanie.

Literatúra:

[1] Calda, E.: Rovnice s racionálními koeficienty, Rozhledy matematicko-fyzikální 69, č. 4, 1990–91, 154–157.

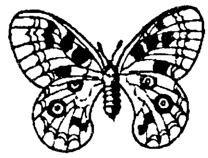
[2] Dubec, A. – Pindroch, Š.: Matematické vzorce a spôsob ich použitia, SPN, Bratislava, 1970.

[3] Eliaš, J. – Horváth, J. – Kajan, J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 2, Alfa, Bratislava, 1979.

[4] Kvant, č. 4, 1978, 48–52.

Vydává Jednota čs. matematiků a fyziků, Žitná 25, 115 67 Praha 1
Sazba programem TEX Karel Horák
Tisk HBT-Jet PRESS Neratovice
Informace o předplatném podá a objednávky přijímá Tiskové středisko
Jednoty čs. matematiků a fyziků, Žitná 25, 115 67 Praha 1
Adresa redakce: MFF UK, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8

ISSN 0035-9343



Tištěno na recyklovaném papíře