

# ROZHLEDY

**matematicko**  

---

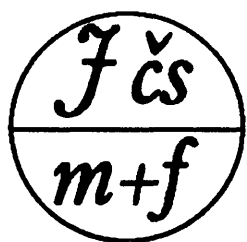
**-fyzikální**  

---

**(  
5-6  
-----  
1992  
)**

**ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL  
A ZÁJEMCE O MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ OBORY**

**ROČNÍK 70, 1992  
CENA 9,00 Kčs**



# ROZHLEDY matematicko -fyzikální

VEDOUcí REDAKTOR: Doc. ing. Ivan Štoll, CSc., ČVUT Praha

ODPOVĚDNÝ REDAKTOR: Doc. RNDr. Jiří Kadleček, CSc., UK Praha

---

## OBSAH

Jozef Doboš: Poznámka o rovniciach . . . . .	193
Emil Calda: Králíci a čísla Fibonacciova . . . . .	197
Oldřich Doseděl, Jiří Fiala, Karel Popp: Hry, hlavolamy a grafy 5	199
Pavel Leischner: Trojúhelník vepsaný do kružnice . . . . .	204
Josef Mašek: O řešení jedné úlohy matematické olympiády . .	208
Jan Chleboun, Michal Křížek: O matematickém modelování fyzi- kálních jevů . . . . .	213
Elena Karabínošová: Máte choré PC-čko? . . . . .	217
Alexandr Doktor: Zeptám se počítače . . . . .	223
Milan Rojko: Fyzika z rychlíku . . . . .	230
Milan Švarc, Eva Tokariková: Elektrický proud pod drobnohľadom	233
Ivo Kraus: Spor o prvenství objevu krystalových soustav . . .	238
František Jáchim: Galileo Galilei a vesmír . . . . .	242
Alena Šolcová: Hra, experiment, porozumění v NTM . . . . .	247
Kruh přátel slunečních hodin v Praze . . . . .	251
Jiří Mída: Půl tuctu matematických úloh . . . . .	253
Jaroslav Flejberk: Trivia—28 easy problems . . . . .	255
Křížovka pro vás . . . . .	260
Jaroslav Zhouf, Zdeněk Kluiber: K přípravě talentů základní školy	263
Mladí budoucí fyzici do světa . . . . .	264
Problems for the VI International Young Physicists Tournament	266
Výsledky III. kola kategorie A 42. ročníku MO . . . . .	271
Řešení úloh . . . . .	272

## Poznámka o rovniciach

Doc. RNDr. JOZEF DOBOŠ, CSc., Technická univerzita, Košice

Pri riešení iracionálnych rovníc sa môžeme stretnúť s algebraickými rovnicami vyšších stupňov. Budeme to ilustrovať na príklade (pozri [4]):

$$\text{„Riešte v } \mathbb{R} \text{ rovnicu } x^2 + \sqrt{x+5} = 5.\text{“} \quad (1)$$

Umocnením a jednoduchými úpravami ju prevedieme na rovnicu:

$$x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0, \quad (2)$$

ktorá však s rovnicou (1) nie je ekvivalentná. Preto budeme musieť previesť skúšku, ktoré z koreňov rovnice (2) vyhovujú rovnici (1).

Úlohu nájsť všetky korene algebraickej rovnice s celočíselnými koeficientami môžeme v niektorých prípadoch zjednodušiť. Napríklad poznanie racionálnych koreňov takejto rovnice nám umožňuje znížiť jej stupeň (postupným delením tejto rovnice odpovedajúcimi koreňovými činiteľmi). Pri hľadaní racionálnych koreňov používame nasledujúcu vetu (pozri napr. [1]): „Nech rovnica

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \quad (3)$$

kde  $a_0, a_n \neq 0$ , ktorej koeficienty sú celé nesúdeliteľné čísla, má racionálny koreň  $\frac{r}{s}$  ( $r, s$  celé nesúdeliteľné). Potom číslo  $r$  je deliteľom koeficienta  $a_0$  a číslo  $s$  je deliteľom koeficienta  $a_n$ .“

Použitím tejto vety ľahko zistíme, že rovnica (2) nemá racionálne korene. Napriek tomu možno rovnicu (2) riešiť elementárnymi prostriedkami.

Všimnime si, že ak rovnica (3) s celočíselnými koeficientami (aspoň druhého stupňa) má aspoň jeden racionálny koreň, potom ju možno upraviť na ekvivalentný tvar

$$P(x) \cdot Q(x) = 0, \quad (4)$$

kde  $P(x)$  a  $Q(x)$  sú polynómy (aspoň prvého stupňa) s celočíselnými koeficientami.

Na príklade rovnice (2) ukážeme, že na tvar (4) možno upraviť aj niektoré rovnice nemajúce racionálne korene. Polynómy  $P(x)$  a  $Q(x)$  budeme hľadať metódou neurčitých koeficientov:

$$x^4 - 10x^2 - x + 20 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d). \quad (5)$$

Roznásobením pravej strany a porovnaním koeficientov pri jednotlivých mocninách  $x$  dostávame sústavu rovníc

$$\begin{aligned} a + c &= 0, \\ ac + b + d &= -10, \\ ad + bc &= -1, \\ bd &= 20. \end{aligned} \quad (6)$$

Z poslednej rovnice sústavy (6) vyplýva, že čísla  $b$  a  $d$  treba hľadať medzi deliteľmi čísla 20. Za  $b$  postupne dosadzujeme čísla 1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5. Riešiteľnú sústavu dostaneme pre  $b = -4$ :

$$\begin{aligned} a + c &= 0, \\ ac &= -1, \\ -5a - 4c &= -1. \end{aligned}$$

Vypočítané hodnoty potom sú  $a = 1$ ,  $c = -1$ ,  $d = -5$ . Teda rovnicu (2) môžeme napísať v tvare

$$(x^2 + x - 4)(x^2 - x - 5) = 0.$$

Jej korene sú

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, \quad x_3 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}, \quad x_4 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}.$$

Dosadením sa môžeme presvedčiť, že riešením rovnice (1) sú iba čísla  $x_1$  a  $x_4$ . Pre ilustráciu prevedieme skúšku pre  $x_1$ . Dosadením  $a = 9$ ,  $b = 64$  do vzorca

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2} \sqrt{a + \sqrt{a^2 - b}}$$

(pozri [2], str. 11), dostávame identitu

$$\sqrt{17} + 1 = \sqrt{2} \sqrt{9 + \sqrt{17}},$$

ktorú použijeme v nasledujúcich úpravách:

$$x_1^2 + \sqrt{x_1 + 5} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} + \frac{\sqrt{9 + \sqrt{17}}}{\sqrt{2}} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} + \frac{\sqrt{17} + 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 5.$$

Teraz zhrnieme použitý postup pre rovnice štvrtého stupňa tvaru

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0, \quad (7)$$

kde  $a_1, a_2, a_3, a_4$  sú celé čísla.

Rozklad ľavej strany rovnice (7) hľadáme v tvare

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \quad (8)$$

Roznásobením pravej strany rovnosti (8) a porovnaním odpovedajúcich si koeficientov dostávame sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} a + c &= a_1, \\ ac + b + d &= a_2, \\ ad + bc &= a_3, \\ bd &= a_4. \end{aligned} \quad (9)$$

Číslo  $b$  hľadáme medzi deliteľmi čísla  $a_4$ . Postupným dosadzovaním takto získaných hodnôt do sústavy (9) dostávame (po úprave) lineárne sústavy rovníc, ktoré vieme riešiť.

Nasledujúci príklad ukazuje, že tento postup možno použiť aj za slabších predpokladov — čísla  $a, c$  v (5) nemusia byť celé.

**Príklad.** Riešte v  $\mathbb{R}$  rovnicu

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0. \quad (10)$$

*Riešenie.* Sústava (9) má v tomto prípade tvar

$$\begin{aligned} a + c &= -1, \\ ac + b + d &= -3, \\ ad + bc &= 1, \\ bd &= 1. \end{aligned}$$

Pre  $b = -1$  dostávame  $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $c = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ,  $d = -1$ . Teda rovnicu (10) možno upraviť na tvar

$$\left(x^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}x - 1\right) \left(x^2 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}x - 1\right) = 0.$$

Jej korene sú

$$x_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}}{4}, \quad x_{3,4} = \frac{1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{22 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

Hľadanie rozkladov tvaru (8) možno použiť v niektorých úlohách na integrovanie racionálnych lomených funkcií, napr.

$$\int \frac{2x^3 - 7x^2 + 12x - 10}{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 12} dx$$

(pozri napr. [3], str. 148, pr. 801). Na záver poznamenajme, že aj keď sa uvedeným spôsobom nedá riešiť každá rovnica štvrtého stupňa s celočíselnými koeficientami (napr.  $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0$ ), jeho jednoduchosť nás oprávňuje odporúčať jeho používanie.

#### Literatúra:

- [1] Calda, E.: Rovnice s racionálnymi koeficienty, *Rozhledy matematicko-fyzikální* 69, č. 4, 1990–91, 154–157.
- [2] Dubec, A. – Pindroch, Š.: *Matematické vzorce a spôsob ich použitia*, SPN, Bratislava, 1970.
- [3] Eliaš, J. – Horváth, J. – Kajan, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky 2*, Alfa, Bratislava, 1979.
- [4] *Kvant*, č. 4, 1978, 48–52.

Vydává Jednota čs. matematiků a fyziků, Žitná 25, 115 67 Praha 1

Sazba programem T<sub>E</sub>X Karel Horák

Tisk HBT-Jet PRESS Neratovice

Informace o předplatném podá a objednávky přijímá Tiskové středisko

Jednoty čs. matematiků a fyziků, Žitná 25, 115 67 Praha 1

Adresa redakce: MFF UK, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8

ISSN 0035-9343

© Jednota čs. matematiků a fyziků, Praha 1992

Tištěno na recyklovaném papíře

