MATEMATICKÉ OBZORY

Zväzok 24

1986

MATEMATICKÉ OBZORY 24/1986

Záujmová publikácia Jednoty slovenských matematikov
a fyzikov
Vydala Alfa,
vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava

Adresa redakcie: Katedra geometrie MFF UK
Mlynská dolina, 842 15 Bratislava

Distribúciu zabezpečuje: Dr. Magdaléna Halická, Ústav aplikovanej matematiky UK,
Mlynská dolina, 842 15 Bratislava

Redakcia interných publikácií — vedúci redaktor Juraj Koutný

ALFA, Bratislava 1986

MATEMATICKÉ OBZORY 24/1985

O FUNKCII

JOZEF DOBOŠ, Košice

K základným kameňom vyššej matematiky patrí pojem funkcie. Cieľom tohto článku je pomôcť pri osvojovaní tohto pojmu.

Funkcia je daná dvoma množinami X a Y a pravidlom, ktoré priraďuje každému prvku množiny X práve jeden prvok množiny Y. Teda pod funkciou rozumieme matematický objekt, ktorý je určený dvoma množinami a spôsobom priradenia prvkov jednej množiny prvkom druhej množiny. Funkcie sa najčastejšie označujú písmenami f, g, h, ... Keď chceme vyjadriť, že funkcia f priraďuje prvkom množiny X prvky množiny Y, píšeme $f: X \to Y$. Množinu X nazývame definičným oborom funkcie f. Symbolom $f(x)$ označujeme ten prvok množiny Y, ktorý je funkciou f priradený prvku x z množiny X. Voláme ho hodnotou funkcie f v prvku x. Vidíme, že symboly f a $f(x)$ majú rozdielny význam. Prvý znamená funkciu samu a druhý znamená konkrétny prvok množiny Y. V praxi sa táto dohoda často nedodržiava. Napríklad ak sa dohovoríme, že y bude označovať hodnotu funkcie f v ľubovoľnom prvku x, hovoríme potom o funkcii $y = f(x)$. Tiež hovoríme napríklad o funkcii $x^2 - 5x + 6$, pretože nechceme na jej označenie zaviesť špeciálny symbol.

Teraz prejdeme ku konkrétnemu príkladu zo zbierky úloh.

Príklad 1. (Pozri [3], str. 31, pr. 81.b.) Nájdite definičný obor funkcie $y = f(x)$, ak

(1)
$$y = \sqrt{4-x} - \sqrt{x+2} + \sqrt{15-x}$$

Treba to chápať tak, že uvažovaná funkcia je tvaru $f: X \to R$ (kde R označuje množinu všetkých reálnych čísel), pričom x je množina všetkých tých reálnych čísel x, pre ktoré pravá strana rovnosti (1) predstavuje reálne číslo (po dosadení). Pretože pod druhou odmocninou musí byť nezáporné číslo, v našom prípade množinou X je interval $\langle -2, 4 \rangle$.

Spôsob priradenia je určený nasledovne. Prvku x z množiny X je priradený ten prvok y z množiny R, ktorý je určený rovnosťou (1) (po dosadení). Teda napríklad prvku $x = -1$ je funkciou f priradený prvok $y = \sqrt{4-(-1)} - \sqrt{(-1)+2} + \sqrt{15-(-1)} = 3 + \sqrt{5}$. Takto určené priradenie môžeme vyjadriť v tvare

$$f(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{x+2} + \sqrt{15-x} \tag{2}$$

ktorý je vhodnejší pre výpočet hodnôt funkcie f v konkrétnych prvkoch. Ako teraz určíme hodnotu funkcie f v prvku 0? Vo vzťahu (2) všade namiesto x napíšeme 0 a pravú stranu podľa potreby upravíme:

$$f(0) = \sqrt{4-0} - \sqrt{0+2} + \sqrt{15-0} = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{15}$$

Situácia sa zamotáva, ak sa symbol x vyskytuje aj vo vyjadrení prvku. Napríklad v úlohe: Vypočítajte $f(2x+3)$. Študent dokáže dobre vypočítať hodnoty $f(1)$, $f(\sqrt{2})$, $f(2)$, $f(3{,}78)$, a pod., ale $f(2x+3)$ už nie. Môžeme si pomôcť otázkou: Čomu sa rovná

$$f\left(\bigcirc\right)?$$

Študent zaváha, je zaskočený. Pomôžeme mu

$$f\left(\bigcirc\right) = \sqrt{4-\bigcirc} - \sqrt{\bigcirc+2} + \sqrt{15-\bigcirc} \tag{3}$$

Študent si to porovná so vzťahom (2) a súhlasí. Teraz sa dohodneme, že náš ovál nazveme $2x+3$. Vpíšeme to do schémy (3).

$$f\left(2x+3\right) = \sqrt{4-2x+3} - \sqrt{2x+3+2} + \sqrt{15-2x+3}$$

Zmažeme vrchné a spodné časti oválov tak, aby z nich zostali iba okrúhle zátvorky.

$$f((2x+3)) = \sqrt{4-(2x+3)} - \sqrt{(2x+3)+2} + \sqrt{15-(2x+3)}$$

Zvyšok je už iba rutinné upravovanie získaného výrazu.

(4) $$f(2x+3)=\sqrt{1-2x}-\sqrt{2x+5}+\sqrt{12-2x}$$

Pre úplnosť poznamenajme, že definičným oborom funkcie (4) je interval $\langle -5/2, 1/2\rangle$. Zamyslime sa nad vzťahom (4). Ak výraz $2x+3$ interpretujeme ako funkciu $g: R \to R$ určenú rovnosťou

(5) $$g(x)=2x+3$$

potom ľavá strana v (4) predstavuje výraz $f(g(x))$. Takto sa dostávame k pojmu zloženej funkcie.

Ak $g: X \to Y$ a $f: Y \to Z$ sú funkcie, potom funkcia $h: X \to Z$ definovaná vzťahom

(6) $$h(x)=f(g(x)) \qquad \text{pre } x \in X$$

sa nazýva funkciou zloženou z funkcií g a f. Označujeme ju $f \circ g$. Podľa definície teda platí

(7) $$(f \circ g)(x)=f(g(x)) \qquad \text{pre } x \in X$$

Pokúsme sa teraz riešiť opačnú úlohu, t. j. nájsť funkciu f, ak poznáme funkcie g a $f \circ g$.

Príklad 2. (Pozri [2], str. 31, pr. 213.) Nájdite $f(x)$, ak

(8) $$f(1/x)=x+\sqrt{1+x^2}$$

Všimnime si, že do (8) nemôžeme dosadiť $x=0$, hoci pravá strana je definovaná pre každé reálne číslo x. V tejto úlohe stačí označiť prvok $g(x)$ nejakým symbolom. Napríklad v našom prípade

(9) $$1/x=a$$

Zo vzťahu (9) vypočítame $x=1/a$ a dosadíme do (8):

$$f(a)=1/a+\sqrt{1+(1/a)^2}$$

Po úprave dostávame

(10) $$f(a)=(1+\sqrt{1+a^2})/a$$

Teraz stačí chápať vzťah (10) ako predpis určujúci funkciu f (správnosť tohto náhľadu možno overiť skúškou správnosti). Pretože sme si zvykli označovať premennú symbolom x, môžeme vzťah (10) prepísať do tvaru

$$f(x)=(1+\sqrt{1+x^2})/x \tag{11}$$

Pritom definičným oborom funkcie f je množina $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$.

Na vzťah (8) môžeme pozerať ako na rovnicu, v ktorej neznámou je funkcia f. Takéto rovnice sa nazývajú funkcionálne. Podrobnejšie sa o nich môžete dozvedieť zo [7]. Nehovorili sme o histórii pojmu funkcie, čitateľovi odporúčame knihu [5], str. 12.

Na záver uvedieme niekoľko úloh na precvičovanie. Prvých päť je zo zbierky [2], str. 31, poslednú z časopisu Kvant, č. 12, 1980, str. 14.

Úlohy

1. Nájdite $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$, ak $f(x)=1/(1-x)$
2. Nech $f_n(x)=\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n\text{-krát}}$. Nájdite $f_n(x)$, ak

$$f(x)=x/\sqrt{1+x^2}$$

3. Nájdite $f(x)$, ak $f(x+1)=x^2-3x+2$
4. Nájdite $f(x)$, ak $f(x+1/x)=x^2+1/x^2$
5. Nájdite $f(x)$, ak $f(x/(x+1))=x^2$
6. Nájdite $f(x)$, ak

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2\,.\,f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x$$

Výsledky úloh

1. $1-1/x$; x. **2.** $x/\sqrt{1+nx^2}$. **3.** x^2-5x+6. **4.** x^2-2
5. $(x/(1-x))^2$. **6.** $(4x+5)/(3-3x)$

Literatúra

1. Borůvka, O.: Diferenciální rovnice v rámci dějin matematiky. Matematické obzory 11, 1977, 1—10.

2. Demidovič, B. P.: zbierka úloh a cvičení z matematickej analýzy (v ruštine). Nauka, Moskva 1977.
3. Eliaš, J.—Horváth, J.—Kajan, J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 2. Alfa, Bratislava 1979.
4. Janků, M.: Pojem funkce v didaktickém systému základní školy. Matematika a fyzika ve škole (13), 1982/83, 5, 341—346.
5. Marcus, S.: Matematická analýza čtená podruhé. Academia, Praha 1976.
6. Sikorski, R.: Diferenciální a integrální počet. Funkce více proměnných. Academia, Praha 1973.
7. Smítal, J.: Základy teórie funkcií I., Matematické obzory 3, 1973, 21—36.

REDAKCIA INTERNÝCH PUBLIKÁCIÍ

Za obsah zodpovedá Jednota slovenských matematikov a fyzikov, Bratislava

MATEMATICKÉ OBZORY
24/1985

Vydala ALFA, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, n. p., Bratislava, Hurbanovo nám. 3 v máji 1986 ako svoju 9955. publikáciu

Zodpovedná redaktorka Veronika Šimovičová
Technická redaktorka Ľudmila Bugárová

Vytlačili ZT, n. p., závod Svornosť, Bratislava, ul. Februárového víťazstva 20

Rozsah 4,75 VH, 4,88 AH
1. vydanie. Náklad 3000 výtlačkov

63—075—86
03 Kčs 8,—

508/21; 826

OBSAH

Peter Bero: Niekoľko skúseností z výchovy matematických talentov v triedach so zameraním na matematiku 1
Beloslav Riečan: Nezávisle o závislosti 9
Tomáš Hecht: Vymýšľanie nových príkladov 23
Anton Černý: Slová bez štvorcov 31
Anna Michalcová: Skúsenosti s vyučovaním štatistiky 39
Jozef Hvorecký: Výpočet kosínusu delením intervalu na polovice 49
Jolana Rybárová: Vytváranie pojmov metódou kombinovaného dialógu 55
Jozef Doboš: O funkcii 63
Milan Hejný: Témy pre prácu SOČ 69
Vladimír Burjan: Geometria netradičných metrík 73
Beter Bero—Róbert Szelepcsényi: Neurčito o určitom integráli 77
Bohuslav Sivák: Poznáte princíp troch množín? 87
Bohuslav Sivák: Úlohy pre prácu matematických krúžkov . . 91
Recenzie 93