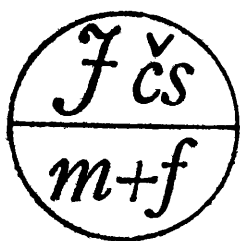


rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

9

ROČNÍK 58, 1979-1980, KVĚTEN



ROČNÍK 58
KVĚTEN 1980

9

rozhledy

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

OBSAH

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, UK Praha,
nesitel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Dr. Jiří Mida, UK Praha

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT Brno, dr. Milan Bednařík, UP Olomouc, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. dr. Ján Chrapan, CSc., UK Bratislava, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, doc. ing. Zdeněk Janout, CSc., ČVUT Praha, dr. Milan Marčok, CSc., VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, dr. Josef Novák, CSc., UK Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, dr. Oldřich Petránek, SPSEI Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, doc. Ota Setzer, ČVUT Praha, dr. Jaroslav Šedivý, UK Praha, doc. dr. Ondřej Šedivý, CSc., PF Nitra, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ÚNM Praha.

REDAKCE:

M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město.
Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta a každý doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS - ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, administrace vývozu tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. © Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze 1980.

Dr. A. Hlaváč: Docent RNDr. Július Krmešský, predstaviteľ najstarších žijúcich slovenských fyzikov, osemdesiatročný	385
Doc. ing. I. Štoll, CSc., doc. ing. Z. Janout, CSc.: Zemřel docent Josef Dibelka	387
J. Doboš: Spojitosť	389
Prof. E. Kraemer: Konstrukce průsečíků kružnice s hyperbolou . I.	392
J. S.: Věta o čtyřech barvách znovu na scéně?	396
Dr. M. Řešátko: Vývoj mezinárodního metru	397
Úlohy I. kola 30. ročníku MO	400
Úlohy pro 1. kolo XXII. ročníku FO	404
Pro volnou chvíli	420
Nejmłodším čtenářům	424
Ze zahraničních časopisů	425
Různé	429
Recenze	430
Doc. dr. K. Šindelář, CSc.: Slovníček italsko-český	3. a 4. str. obálky



Spojitosť

JOZEF DOBOŠ, poslucháč PFUK Bratislava

Pri skúmaní funkcionálnych závislostí prichádzame k vydeleniu istých funkcií majúcich celý rad špeciálnych vlastností, ktoré z nich tvoria mohutný nástroj skúmania. Sú to tzv. spojité funkcie.

Najskôr si objasníme niektoré pojmy a označenia, ktoré budeme potrebovať k ďalšiemu výkladu.

Vzdialenosťou bodu $s \in \mathbf{R}$ od neprázdnej množiny $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$ nazývame také reálne číslo a (označujeme ho $d(s, \mathbf{T})$), pre ktoré platí

$$(1) \quad \forall t \in \mathbf{T}; \quad a \leq |s - t|,$$

$$(2) \quad \forall v \in \mathbf{R} \quad \forall t \in \mathbf{T}; \quad v \leq |s - t| \Rightarrow v \leq a.$$

Teda $d(s, \mathbf{T})$ je také reálne číslo, ktoré je menšie alebo rovné ako vzdialenosť bodu s od ľubovoľného bodu t množiny \mathbf{T} , pričom je najväčšie zo všetkých čísel, majúcich túto vlastnosť.

Poznámka. Ak $s \in \mathbf{T}$, potom z definície vidíme, že

$$d(s, \mathbf{T}) = 0.$$

Príklad 1. Nech $\mathbf{T} = \langle 1, \infty \rangle$. Potom pre $s \notin \mathbf{T}$ platí $d(s, \mathbf{T}) = |s - 1|$. Teda sme našli bod $t \in \mathbf{T}$ ($t = 1$) taký, že $d(s, \mathbf{T}) = |s - t|$.

Príklad 2. Nech $\mathbf{T} = (-\infty, 2)$. Potom pre $s \notin \mathbf{T}$ platí $d(s, \mathbf{T}) = |s - 2|$. Teraz už nenájdeme taký bod $t \in \mathbf{T}$, aby platilo $d(s, \mathbf{T}) = |s - t|$.

Poznámka. Všimnime si, že ak množina \mathbf{T} je jednoprvková, t. j. $\mathbf{T} = \{t\}$, tak $d(s, \mathbf{T}) = d(s, \{t\}) = |s - t|$, čo je vzdialenosť bodu s od bodu t .

Teraz ukážeme niektoré vlastnosti veličiny $d(s, \mathbf{T})$.

Veta 1. Nech $s \in \mathbf{R}$, $\emptyset \neq \mathbf{T} \subset \mathbf{R}$. Potom platí

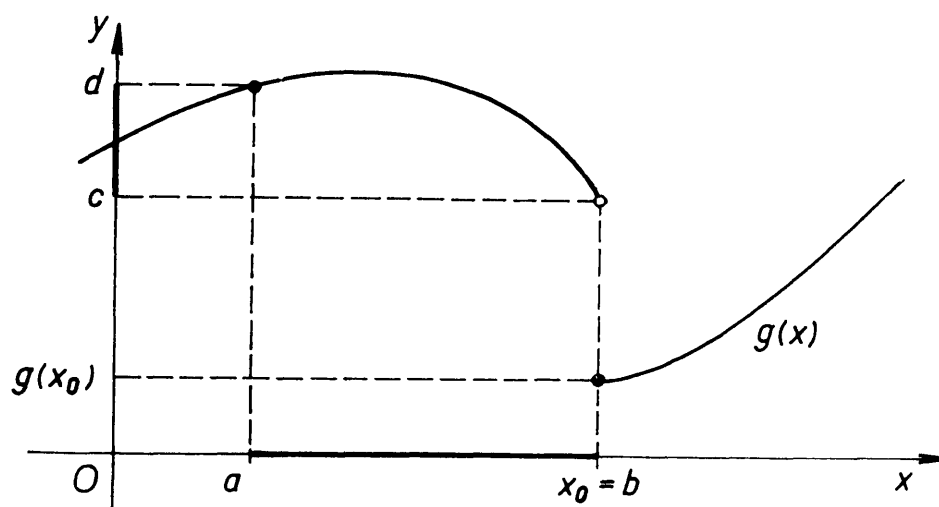
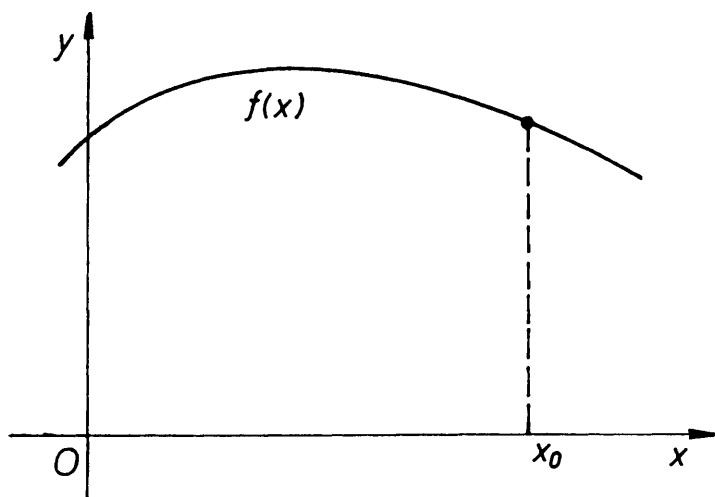
$$(3) \quad d(s, \mathbf{T}) \geq 0,$$

$$(4) \quad d(s, \mathbf{T}) = 0 \Rightarrow (\forall \delta > 0 \exists t \in \mathbf{T}; |s - t| < \delta).$$

Dôkaz. Skutočne, $\forall t \in \mathbf{T}; 0 \leq |s - t|$, teda podľa (2) platí $0 \leq d(s, \mathbf{T})$. Vlastnosť (4) ukážeme sporom: nech $\exists \delta > 0 \quad \forall t \in \mathbf{T}; |s - t| \geq \delta$. Potom podľa (2) je $0 < \delta \leq d(s, \mathbf{T}) = 0$, čo je spor. Teda (4) platí.

Obrazom množiny $\mathbf{H} \subset \mathbf{R}$ pri zobrazení $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ nazývame množinu

$$h[\mathbf{H}] = \{h(x); x \in \mathbf{H}\}.$$



Obr. 2

Príklad 3. Nech $\mathbf{H} = \{-2, 3\}$, $h(x) = x^2$. Potom $h[\mathbf{H}] = \{4, 9\}$.

Poznámka. Všimnime si, že ak množina \mathbf{H} je jednoprvková, t. j. $\mathbf{H} = \{u\}$, tak $h[\mathbf{H}] = h[\{u\}] = \{h(u)\}$, čo je jednoprvková množina.

Prezrime si pozorne grafy funkcií znázornených na obrázkoch 1 a 2. Intuitívne je nám jasné, že funkcia f je spojitá a g nie je. V ďalšom sa pokúsime o matematizáciu týchto predstáv. Ukážeme vhodnú vlastnosť vydeľujúcu funkcie, ktoré sú podľa nás nespojité. Potom spojité funkcie budú tie, ktoré túto vlastnosť nemajú. Všimnime si, že existuje taká množina $\mathbf{A} \neq \emptyset$ ($\mathbf{A} = (a, b)$), že $d(x_0, \mathbf{A}) = 0$, ale vzdialenosť bodu $g(x_0)$ od množiny $g[\mathbf{A}] = (c, d)$ už nie je rovná nule. Pritom funkcia f túto vlastnosť nemá. Ukazuje sa, že toto je charakteristickou vlastnosťou funkcií nespojitých v bode x_0 .

Charakterizáciu funkcie g nespojitej v bode x_0 dostávame v tvare

$$(5) \quad \exists \mathbf{A} \subset \mathbb{R}, \mathbf{A} \neq \emptyset, d(x_0, \mathbf{A}) = 0; d(g(x_0), g[\mathbf{A}]) \neq 0.$$

Potom charakterizáciu funkcie f spojitej v bode x_0 dostávame negáciou výroku (5):

$$(6) \quad \forall A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, d(x_0, A) = 0; d(f(x_0), f[A]) = 0,$$

t. j. funkcia f je spojitá v bode x_0 práve vtedy, keď pre každú neprázdnu množinu A majúcu vzdialenosť od bodu x_0 rovnú nule má jej obraz $f[A]$ vzdialenosť od bodu $f(x_0)$ rovnú nule.

Na záver ukážeme ekvivalentnosť charakterizácie (6) s tzv. $\varepsilon - \delta$ definíciou (známou z učebnice):

$$(7) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Dôkaz. Predpokladajme najskôr, že f má vlastnosť (7). Ukážeme, že potom má aj vlastnosť (6). Nech $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, d(x_0, A) = 0$. Potom $d(f(x_0), f[A]) = 0$. Skutočne, ak by totiž $d(f(x_0), f[A]) \neq 0$, podľa (3) môžeme položiť $\varepsilon = d(f(x_0), f[A]) > 0$. Podľa (7) platí

$$(8) \quad \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pretože $d(x_0, A) = 0$, podľa (4) platí $\exists t \in A; |x_0 - t| < \delta$.

Teda podľa (8) platí $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ a podľa (1) platí $d(f(x_0), f[A]) \leq \leq |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon = d(f(x_0), f[A])$, čo je spor. Teda musí platiť $d(f(x_0), f[A]) = 0$. Tým sme ukázali, že f má vlastnosť (6).

Teraz predpokladajme, že f nemá vlastnosť (7), t. j. že

$$(9) \quad \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta; |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Ukážeme, že potom f má vlastnosť (5) (ktorá je negáciou vlastnosti (6)). Nech n je prirodzené číslo. Potom pre $\delta = 1/n$ podľa (9) platí

$$(10) \quad \exists x_n \in \mathbb{R}, |x_n - x_0| < 1/n; |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Označme $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ (kde \mathbb{N} je množina všetkých prirodzených čísel). Potom $d(x_0, A) = 0$. Skutočne, ak by totiž $d(x_0, A) > 0$, tak by existovalo $n \in \mathbb{N}$ také, že $1/n \leq d(x_0, A)$, a potom podľa (1) by platilo $d(x_0, A) \leq \leq |x_0 - x_n| < 1/n \leq d(x_0, A)$, čo je spor. Pritom však $d(f(x_0), f[A]) \neq 0$. Skutočne, pre každé $n \in \mathbb{N}$ podľa (10) platí

$$\varepsilon \leq |f(x_0) - f(x_n)|,$$

teda podľa (2) platí

$$0 < \varepsilon \leq d(f(x_0), f[A]).$$

Teda f má vlastnosť (5). Tým je ekvivalentnosť (6) a (7) dokázaná.