rozhledy

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

9

ROČNÍK 58, 1979-1980, KVĚTEN

ROČNÍK 58
KVĚTEN 1980

9

rozhledy MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

OBSAH

REDAKCE:
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město. Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.
Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,– Kčs, v zahraničí 3 $, cena jednotlivého čísla 2,– Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta a každý doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS – ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, administrace vývozu tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc.

Spojitosť

JOZEF DOBOŠ, poslucháč PFUK Bratislava

Pri skúmaní funkcionálnych závislostí prichádzame k vydeleniu istých funkcií majúcich celý rad špeciálnych vlastností, ktoré z nich tvoria mohutný nástroj skúmania. Sú to tzv. spojité funkcie.

Najskôr si objasníme niektoré pojmy a označenia, ktoré budeme potrebovať k ďalšiemu výkladu.

Vzdialenosťou bodu $s \in \mathbf{R}$ od neprázdnej množiny $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$ nazývame také reálne číslo a (označujeme ho $d(s, \mathbf{T})$), pre ktoré platí

$$\forall t \in \mathbf{T};\quad a \leqq |s - t|, \tag{1}$$

$$\forall v \in \mathbf{R}\ \forall t \in \mathbf{T};\quad v \leqq |s - t| \Rightarrow v \leqq a. \tag{2}$$

Teda $d(s, T)$ je také reálne číslo, ktoré je menšie alebo rovné ako vzdialenosť bodu s od ľubovoľného bodu t množiny $\mathbf{T}$, pričom je najväčšie zo všetkých čísel, majúcich túto vlastnosť.

Poznámka. Ak $s \in \mathbf{T}$, potom z definície vidíme, že

$$d(s, \mathbf{T}) = 0\,.$$

Príklad 1. Nech $\mathbf{T} = \langle 1, \infty)$. Potom pre $s \notin \mathbf{T}$ platí $d(s, \mathbf{T}) = |s - 1|$. Teda sme našli bod $t \in \mathbf{T}$ $(t = 1)$ taký, že $d(s, \mathbf{T}) = |s - t|$.

Príklad 2. Nech $\mathbf{T} = (-\infty, 2)$. Potom pre $s \notin \mathbf{T}$ platí $d(s, \mathbf{T}) = |s - 2|$. Teraz už nenájdeme taký bod $t \in \mathbf{T}$, aby platilo $d(s, \mathbf{T}) = |s - t|$.

Poznámka. Všimnime si, že ak množina $\mathbf{T}$ je jednoprvková, t. j. $\mathbf{T} = \{t\}$, tak $d(s, \mathbf{T}) = d(s, \{t\}) = |s - t|$, čo je vzdialenosť bodu s od bodu t.

Teraz ukážeme niektoré vlastnosti veličiny $d(s, \mathbf{T})$.

Veta 1. Nech $s \in \mathbf{R}$, $\emptyset \neq \mathbf{T} \subset \mathbf{R}$. Potom platí

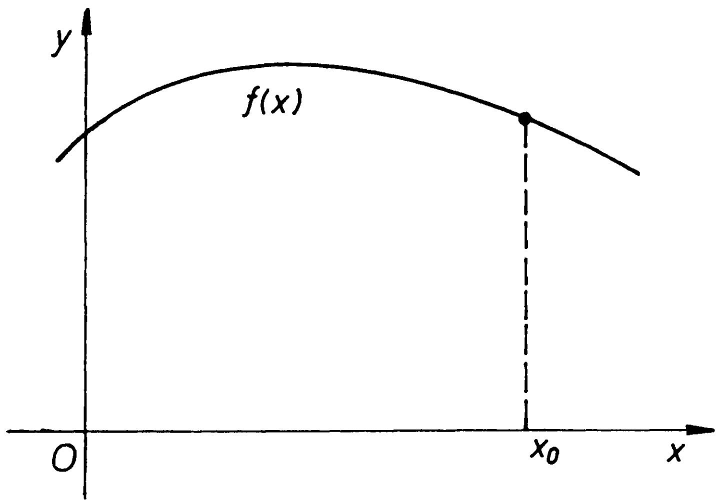
$$d(s, \mathbf{T}) \geqq 0\,, \tag{3}$$

$$d(s, \mathbf{T}) = 0 \Rightarrow (\forall \delta > 0\ \exists\, t \in \mathbf{T};\quad |s - t| < \delta). \tag{4}$$

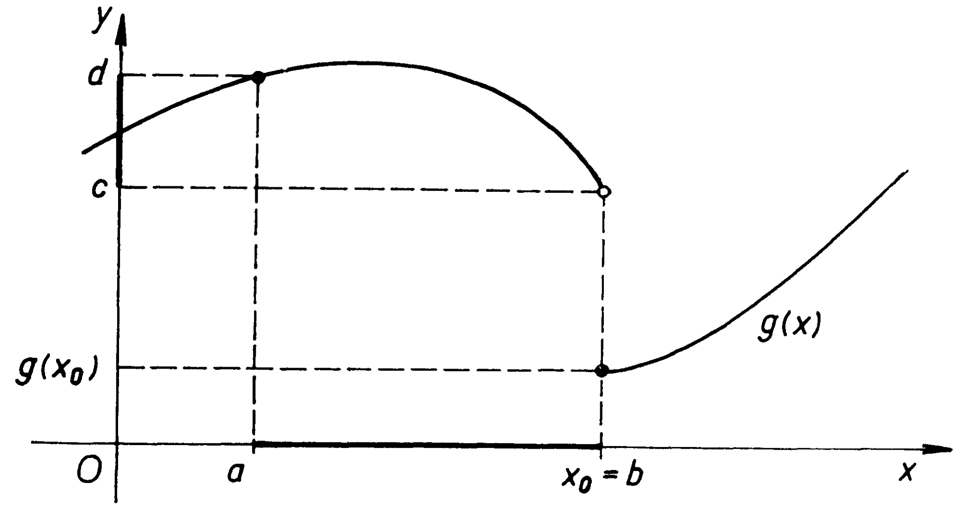
Dôkaz. Skutočne, $\forall t \in \mathbf{T};\ 0 \leqq |s - t|$, teda podľa (2) platí $0 \leqq d(s, \mathbf{T})$. Vlastnosť (4) ukážeme sporom: nech $\exists\, \delta > 0\ \forall t \in \mathbf{T};\ |s - t| \geqq \delta$. Potom podľa (2) je $0 < \delta \leqq d(s, \mathbf{T}) = 0$, čo je spor. Teda (4) platí.

Obrazom množiny $\mathbf{H} \subset \mathbf{R}$ pri zobrazení $\mathbf{h} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nazývame množinu

$$\mathbf{h}[\mathbf{H}] = \{\mathbf{h}(x);\ x \in \mathbf{H}\}\,.$$



Obr. 1



Obr. 2

Príklad 3. Nech $\mathbf{H} = \{-2, 3\}$, $\mathrm{h}(x) = x^2$. Potom $\mathrm{h}[\mathbf{H}] = \{4, 9\}$.

Poznámka. Všimnime si, že ak množina $\mathbf{H}$ je jednoprvková, t. j. $\mathbf{H} = \{u\}$, tak $\mathrm{h}[\mathbf{H}] = \mathrm{h}\ [\{u\}] = \{\mathrm{h}(u)\}$, čo je jednoprvková množina.

Prezrime si pozorne grafy funkcií znázornených na obrázkoch 1 a 2. Intuitívne je nám jasné, že funkcia f je spojitá a g nie je. V ďalšom sa pokúsime o matematizáciu týchto predstáv. Ukážeme vhodnú vlastnosť vydeľujúcu funkcie, ktoré sú podľa nás nespojité. Potom spojité funkcie budú tie, ktoré túto vlastnosť nemajú. Všimnime si, že existuje taká množina $\mathbf{A} \neq \emptyset$ $(\mathbf{A} = (a, b))$, že $d(x_0, \mathbf{A}) = 0$, ale vzdialenosť bodu $\mathrm{g}(x_0)$ od množiny $\mathrm{g}[\mathbf{A}] = (c, d)$ už nie je rovná nule. Pritom funkcia f túto vlastnosť nemá. Ukazuje sa, že toto je charakteristickou vlastnosťou funkcií nespojitých v bode x_0.

Charakterizáciu funkcie g nespojitej v bode x_0 dostávame v tvare

(5) $$\exists\ \mathbf{A} \subset \mathbf{R},\ \mathbf{A} \neq \emptyset,\ d(x_0, \mathbf{A}) = 0;\ d(\mathrm{g}(x_0), \mathrm{g}[\mathbf{A}]) \neq 0\,.$$

Potom charakterizáciu funkcie f spojitej v bode x_0 dostávame negáciou výroku (5):

$$(6) \qquad \forall\, \mathbf{A} \subset \mathbf{R},\ \mathbf{A} \neq \emptyset,\ d(x_0, \mathbf{A}) = 0;\ d(\mathrm{f}(x_0), \mathrm{f}[\mathbf{A}]) = 0\,,$$

t. j. funkcia f je spojitá v bode x_0 práve vtedy, keď pre každú neprázdnu množinu **A** majúcu vzdialenosť od bodu x_0 rovnú nule má jej obraz f[**A**] vzdialenosť od bodu f(x_0) rovnú nule.

Na záver ukážeme ekvivalentnosť charakterizácie (6) s tzv. $\varepsilon - \delta$ definíciou (známou z učebnice):

$$(7) \qquad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in \mathbf{R},\ |x - x_0| < \delta;\ |\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Dôkaz. Predpokladajme najskôr, že f má vlastnosť (7). Ukážeme, že potom má aj vlastnosť (6). Nech $\mathbf{A} \subset \mathbf{R}$, $\mathbf{A} \neq \emptyset$, $d(x_0, \mathbf{A}) = 0$. Potom $d(\mathrm{f}(x_0), \mathrm{f}[\mathbf{A}]) = 0$. Skutočne, ak by totiž $d(\mathrm{f}(x_0)\ (\mathrm{f}[\mathbf{A}]) \neq 0$, podľa (3) môžeme položiť $\varepsilon = d(\mathrm{f}\ (x_0), \mathrm{f}[\mathbf{A}]) > 0$. Podľa (7) platí

$$(8) \qquad \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in \mathbf{R},\ |x - x_0| < \delta;\ |\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Pretože $d(x_0, \mathbf{A}) = 0$, podľa (4) platí $\exists\, t \in \mathbf{A};\ |x_0 - t| < \delta$.
Teda podľa (8) platí $|\mathrm{f}(t) - \mathrm{f}(x_0)| < \varepsilon$ a podľa (1) platí $d(\mathrm{f}(x_0), \mathrm{f}[\mathbf{A}]) \leqq |\mathrm{f}(t) - \mathrm{f}(x_0)| < \varepsilon = d(\mathrm{f}(x_0), \mathrm{f}[\mathbf{A}])$, čo je spor. Teda musí platiť $d(\mathrm{f}(x_0), \mathrm{f}[\mathbf{A}]) = 0$. Tým sme ukázali, že f má vlastnosť (6).
Teraz predpokladajme, že f nemá vlastnosť (7), t. j. že

$$(9) \qquad \exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in \mathbf{R},\ |x - x_0| < \delta;\ |\mathrm{f}\ (x) - \mathrm{f}(x_0)| \geqq \varepsilon\,.$$

Ukážeme, že potom f má vlastnosť (5) (ktorá je negáciou vlastnosti (6)). Nech n je prirodzené číslo. Potom pre $\delta = 1/n$ podľa (9) platí

$$(10) \qquad \exists\, x_n \in \mathbf{R},\ |x_n - x_0| < 1/n;\ |\mathrm{f}(x_n) - \mathrm{f}(x_0)| \geqq \varepsilon\,.$$

Označme $\mathbf{A} = \{x_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ (kde **N** je množina všetkých prirodzených čísel). Potom $d(x_0, \mathbf{A}) = 0$. Skutočne, ak by totiž $d(x_0, \mathbf{A}) > 0$, tak by existovalo $n \in \mathbf{N}$ také, že $1/n \leqq d(x_0, \mathbf{A})$, a potom podľa (1) by platilo $d(x_0\ \mathbf{A}) \leqq |x_0 - x_n| < 1/n \leqq d(x_0, \mathbf{A})$, čo je spor. Pritom však $d(\mathrm{f}(x_0), \mathrm{f}[\mathbf{A}]) \neq 0$. Skutočne, pre každé $n \in \mathbf{N}$ podľa (10) platí

$$\varepsilon \leqq |\mathrm{f}(x_0) - \mathrm{f}(x_n)|\,,$$

teda podľa (2) platí

$$0 < \varepsilon \leqq d(\mathrm{f}(x_0), \mathrm{f}[\mathbf{A}])\,.$$

Teda f má vlastnosť (5). Tým je ekvivalentnosť (6) a (7) dokázaná.