rozhledy

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

7

ROČNÍK 58, 1979-1980, BŘEZEN

Jčs m+f

ROČNÍK 58

BŘEZEN 1980

7

rozhledy MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

OBSAH

REDAKCE:
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1-Nové Město. Telefon 29 87 50 (meziměsto), 29 87 51 až 9.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,– Kčs, v zahraničí 3 $, cena jednotlivého čísla 2,– Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta a každý doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS – ústřední expedice a dovoz tisku, Praha, administrace vývozu tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc.

Trojuholníková nerovnosť

JOZEF DOBOŠ, poslucháč PF UK Bratislava

Pod trojúholníkovou nerovnosťou sa bežne rozumie tento vzťah medzi dĺžkami ľubovoľného trojuholníka:

Dĺžka každej strany je menšia alebo rovná súčtu dĺžok ostatných strán. Vo formálnom zápise:

$$d(A, C) \leqq d(A, B) + d(B, C)\,, \tag{1}$$

kde A, B, C sú vrcholy daného trojuholníka a $d(A, C)$ je vzdialenosť bodu A od bodu C, teda dĺžka strany určenej bodmi A, C [$d(A, B)$, $d(B, C)$ analogicky]. Tento vzťah je nám intuitívne zrejmý (nakreslite si obrázok!). Všimnime si niektoré ďalšie vlastnosti vzdialenosti. Predovšetkým vzdialenosť bodu U od bodu V [značíme $d(U, V)$] je rovná nule práve vtedy, keď sú oba body totožné:

$$d(U, V) = 0 \Leftrightarrow U = V. \tag{2}$$

Ďalej je vzdialenosť bodu U od bodu V rovnaká ako vzdialenosť bodu V od bodu U:

$$d(U, V) = d(V, U)\,. \tag{3}$$

S predstavou o vzdialenosti dvoch bodov ako dĺžke úsečky nimi určenej v bežnom praktickom živote nevystačíme. Napríklad v železničnej doprave merať vzdialenosť dvoch miest (žel. staníc) podľa takejto predstavy o vzdialenosti, t. j. ,,letecky", nemá praktický význam. Pritom aj v matematike sa ukazuje, že vlastnosti (1) až (3) majú aj iné ,,vzdialenosti". Položme napr. $d(X, Y) = 0$ pre $X = Y$, $d(X, Y) = 1$ pre $X \neq Y$. Potom d má skutočne vlastnosti (1) až (3) (overte to!).

Zaujímavý príklad je uvedený v sovietskom časopise *Kvant* (ktorý mnohí z vás určite poznajú) v čísle 1 z roku 1979 (v podobnej rubrike, ako je ,,Naše soutěž"):

Príklad 1. Nech

$$\varrho(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + x^2} . \sqrt{1 + y^2}} .$$

Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c platí nerovnosť

$$\varrho(a, c) \leqq \varrho(a, b) + \varrho(b, c) .$$

Vidíme, že treba overiť trojuholníkovú nerovnosť [overte vlastnosti (2) a (3)!]. Že to až tak jednoduché nie je, zistíme po počiatočných neúspechoch. Najskôr si všimnime, že pre všetky $\delta \neq \pi/2 + k\pi$ ($k \in Z$) platí:

$$1 + \mathrm{tg}^2\delta = \frac{1}{\cos^2\delta} .$$

Skutočne, $1 + \mathrm{tg}^2\delta = 1 + \dfrac{\sin^2\delta}{\cos^2\delta} = \dfrac{\cos^2\delta + \sin^2\delta}{\cos^2\delta} = \dfrac{1}{\cos^2\delta}$, pričom sme využili známy vzťah $\cos^2\delta + \sin^2\delta = 1$.

Nech x, y sú ľubovoľné reálne čísla. Pretože funkcia tangens nadobúda ako svoje hodnoty všetky reálne čísla, potom existujú čísla α, β také, že $x = \mathrm{tg}\alpha$, $y = \mathrm{tg}\beta$ (pozrite si graf funkcie tangens!). Po dosadení do vzťahu

$$\varrho(x, y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1 + x^2} . \sqrt{1 + y^2}}$$

dostávame

$$\varrho(x, y) = \frac{|\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta|}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} . \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\beta}} = \frac{|\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta|}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}} . \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\beta}}} =$$

$$= \sqrt{\cos^2\alpha} . \sqrt{\cos^2\beta} . |\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta| = |\cos\alpha| . |\cos\beta| . \left|\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right| =$$

$$= \left|\cos\alpha . \cos\beta . \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)\right| = |\sin\alpha . \cos\beta - \cos\alpha . \sin\beta| = |\sin(\alpha - \beta)| .$$

Pritom sme využili známy vzťah $\mathrm{tg}\delta = \dfrac{\sin\delta}{\cos\delta}$ pre $\delta \neq \pi/2 + k\pi$ ($k \in Z$), vlastnosti absolútnej hodnoty

$$\sqrt{a^2} = |a| , \qquad |a . b| = |a| . |b|$$

a súčtový vzorec pre sínus $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha . \cos\beta - \cos\alpha . \sin\beta$.
Teda platí

$$\varrho(x, y) = |\sin(\alpha - \beta)| , \tag{4}$$

kde $x = \mathrm{tg}\alpha$, $y = \mathrm{tg}\beta$. Teraz sme už dostatočne vyzbrojení na riešenie našej úlohy. Nech a, b, c sú ľubovoľné reálne čísla. Potom existujú čísla α, β, γ také, že $a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\beta$, $c = \operatorname{tg}\gamma$. Teda $\varrho(a, c) = |\sin(\alpha - \gamma)| = |\sin[(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)]| = |\sin(\alpha - \beta).\cos(\beta - \gamma) + \cos(\alpha - \beta).\sin(\beta - \gamma)| \leqq |\sin(\alpha - \beta).\cos(\beta - \gamma)| + |\cos(\alpha - \beta).\sin(\beta - \gamma)| = |\sin(\alpha - \beta)|.|\cos(\beta - \gamma)| + |\cos(\alpha - \beta)|.|\sin(\beta - \gamma)| \leqq |\sin(\alpha - \beta)| + |\sin(\beta - \gamma)| = \varrho(a, b) + \varrho(b, c)$, čiže $\varrho(a, c) \leqq \varrho(a, b) + \varrho(b, c)$. Pritom sme využili súčtový vzorec pre sínus [$\sin(u + v) = \sin u.\cos v + \cos u.\sin v$], vlastnosti absolútnej hodnoty ($|x + y| \leqq |x| + |y|$, $|x.y| = |x|.|y|$) a vlastnosť funkcie kosínus ($|\cos\delta| \leqq 1$). Tým sme príklad vyriešili.

Na základe predošlých úvah môžeme zaviesť pojem metriky.

Nech $\mathbf{M}$ je ľubovoľná množina. Hovoríme, že na množine $\mathbf{M}$ je definovaná *metrika* ϱ práve vtedy, keď každej usporiadanej dvojici prvkov x, y z množiny $\mathbf{M}$ je priradené nezáporné číslo, ktoré označíme $\varrho(x, y)$ a ktoré má tieto vlastnosti:

$$\text{(i)} \quad \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \, ,$$

$$\text{(ii)} \quad \varrho(x, y) = \varrho(y, x) \, ,$$

$$\text{(iii)} \quad \varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) \, ,$$

pre všetky prvky x, y, z z množiny $\mathbf{M}$.

Množinu $\mathbf{M}$, na ktorej je definovaná metrika ϱ, nazveme *metrickým priestorom*. Tento metrický priestor označíme symbolom $(\mathbf{M}, \varrho)$.

V ďalšom zovšeobecníme postup použitý v príklade 1.

Veta 1. Nech $a < b$ sú reálne čísla a $d(x, y) = |x - y|$ pre x, y z intervalu (a, b) (overte, že d je metrika!). Nech zobrazenie f zobrazuje množinu $\mathbf{R}$ do množiny $\langle 0, \infty)$. Nech pre každé x, y z intervalu $(a - b, b - a)$ platí

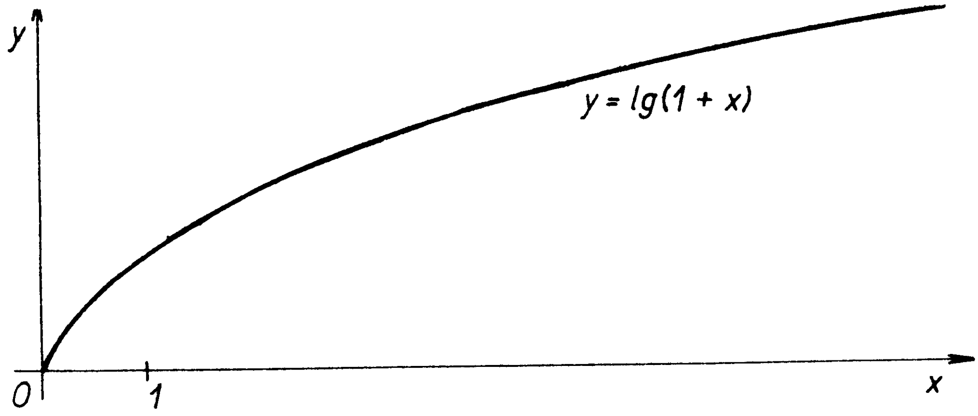
$$\text{(a)} \qquad \mathrm{f}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \, ,$$

$$\text{(b)} \qquad \mathrm{f}(-x) = \mathrm{f}(x) \, ,$$

$$\text{(c)} \qquad \mathrm{f}(x + y) \leqq \mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(y) \, .$$

Potom zobrazenie ϱ definované predpisom $\varrho(x, y) = \mathrm{f}(d(x, y))$ je metrika na intervale (a, b).

Dôkaz. Vlastnosti (i) a (ii) vyplývajú z toho, že d je metrika a platí (a). Ukážeme vlastnosť (iii). Nech x, y, z sú ľubovoľné čísla z intervalu (a, b). Pre určitosť predpokladajme, že napr. $x \leqq z \leqq y$. Potom $d(x, y) = |x - y| = y - x = (y - z) + (z - x) = |y - z| + |x - z| = d(y, z) + d(x, z)$, teda $d(x, z) = d(x, y) + (- d(y, z))$ a podľa (b) a (c) platí $\varrho(x, z) = \mathrm{f}(d(x, z)) = \mathrm{f}(d(x, y) + (- d(y, z))) \leqq \mathrm{f}(d(x, y)) + \mathrm{f}(-d(y, z)) = \mathrm{f}(d(x, y)) + \mathrm{f}(d(y, z)) = \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$. Teda ϱ je metrika na (a, b).
Teraz uvedieme jednu veľmi jednoduchú metódu, ktorá nám umožní definovať na množine $\mathbf{M}$ s danou metrikou d ďalšie metriky.



Obr. 1

Veta 2. Nech **M** je množina a d metrika na **M**. Nech f je zobrazenie s definičným oborom $\langle 0, \infty)$ a s oborom hodnôt **R**. Nech pre všetky reálne čísla x, y z intervalu $\langle 0, \infty)$ platí:

$$\text{(5)} \qquad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\,,$$

$$\text{(6)} \qquad x \leqq y \Rightarrow f(x) \leqq f(y)\,,$$

$$\text{(7)} \qquad f(x + y) \leqq f(x) + f(y)\,.$$

Každej usporiadanej dvojici prvkov x, y z množiny **M** priraďme číslo $\varrho(x, y) = f(d(x, y))$. Potom ϱ je metrika na množine **M**.

Dôkaz. Ukážeme, že ϱ má vlastnosť (i):

Nech $\varrho(x, y) = 0$. Potom $f(d(x, y)) = 0$, teda $d(x, y) = 0$ podľa (5). Pretože d je metrika, platí $x = y$.

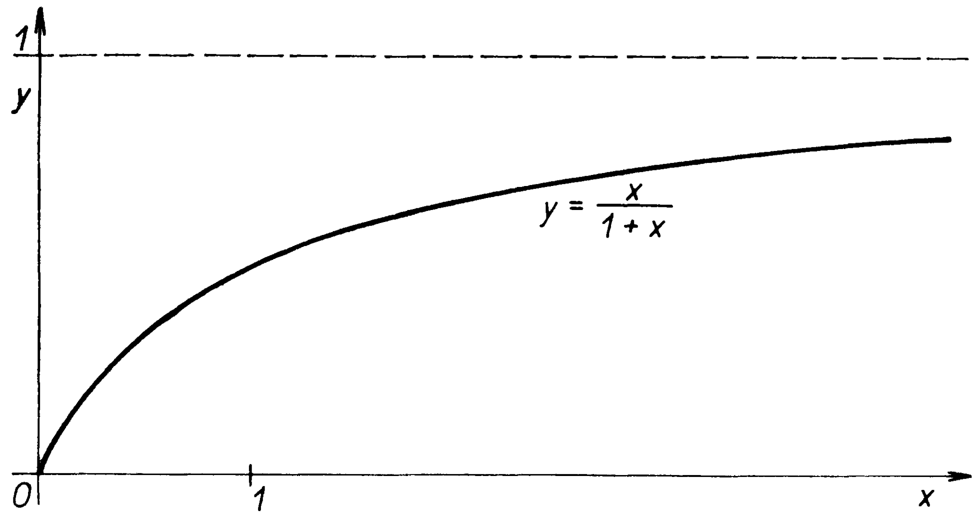
Nech naopak $x = y$. Pretože d je metrika, platí $d(x, y) = 0$, teda $\varrho(x, y) = f(d(x, y)) = 0$ podľa (5).

Ukážeme, že ϱ má vlastnosť (ii):
Pretože d je metrika, platí $\varrho(x, y) = f(d(x, y)) = f(d(y, x)) = \varrho(y, x)$.
Ukážeme, že ϱ má vlastnosť (iii):
Pretože d je metrika, platí $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$. Podľa (6) a (7) teda platí $\varrho(x, z) = f(d(x, z)) \leqq f(d(x, y) + d(y, z)) \leqq f(d(x, y)) + f(d(y, z)) = \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$. Teda ϱ je metrika.

Príklad 2. Ukážte, že zobrazenie f definované predpisom $f(x) = \log(1 + x)$ pre každé x z intervalu $\langle 0, \infty)$ (obr. 1.) vyhovuje podmienkam vety 2.

Pretože logaritmus je rastúca funkcia, pre každé $x > 0$ platí $f(x) = \log(1 + x) > \log 1 = 0$. Pretože $f(0) = \log 1 = 0$, platí $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Teda platí vlastnosť (5).

Z rastúcosti logaritmu dostávame $f(x + y) = \log(1 + x + y) \leqq \log(1 + x + y + xy) = \log(1 + x)(1 + y) = \log(1 + x) + \log(1 + y) = f(x) + f(y)$. Teda $f(x + y) \leqq f(x) + f(y)$. Ak je teraz $(\mathbf{M}, d)$ ľubovoľný



Obr. 2

metrický priestor, potom pomocou zobrazenia f dostávame nový metrický priestor $(\mathbf{M}, \varrho)$ s metrikou $\varrho(x, y) = \log[1 + d(x, y)]$.

Príklad 3. Ukážte, že zobrazenie f definované predpisom $\mathrm{f}(x) = x/(1 + x)$ pre každé x z intervalu $\langle 0, \infty)$ (obr. 2.) vyhovuje podmienkam vety 2.

Vlastnosti (5) a (6) sú zrejmé. Vlastnosť (7) dostávame takto:

$$\mathrm{f}(u + v) = \frac{u + v}{1 + u + v} = \frac{u}{1 + u + v} + \frac{v}{1 + u + v} \leqq$$

$$\leqq \frac{u}{1 + u} + \frac{v}{1 + v} = \mathrm{f}(u) + \mathrm{f}(v)\,.$$

Pre metriku ϱ máme teda $\varrho(x, y) = d(x, y)/[1 + d(x, y)]$.

Príklad 4. Ukážte, že zobrazenie f definované predpisom $\mathrm{f}(x) = \min(1, x)$ (pričom pre ľubovoľné reálne čísla u, v je symbol $\min(u, v)$ definovaný predpisom $\min(u, v) = u$ ak $u \leqq v$, $\min(u, v) = v$ ak $u > v$) vyhovuje podmienkam vety 2.

Overíme vlastnosť (7) (overte (5) a (6)!). Nech u, v sú ľubovoľné reálne čísla z intervalu $\langle 0, \infty)$. Ak je $u + v < 1$, platí $\mathrm{f}(u + v) = \min(1, u + v) = u + v = \min(1, u) + \min(1, v) = \mathrm{f}(u) + \mathrm{f}(v)$. Ak je $u + v \geqq 1$, je $\mathrm{f}(u + v) = \min(1, u + v) = 1 \leqq \min(2, u + v, 1 + u, 1 + v) \leqq \min(1, u) + \min(1, v) = \mathrm{f}(u) + \mathrm{f}(v)$.

Pozrime sa teraz pozorne na obrázky 1 a 2. Ich spoločnou vlastnosťou je konkávnosť. Overte i pre $\mathrm{f}(x) = \min(1, x)$. Pripomeňme si definíciu konkávnosti.

Hovoríme, že zobrazenie f definované na intervale $\mathbf{I}$ s hodnotami v množine reálnych čísel je *konkávne* práve vtedy, keď pre každé dva body u, v z intervalu $\mathbf{I}$ každý bod $M_z = [z; \mathrm{f}(z)]$ grafu zobrazenia f, pre ktorý $u < z < v$, leží nad úsečkou spájajúcu body $M_u = [u; \mathrm{f}(u)]$, $M_v = [v; \mathrm{f}(v)]$. (Nakreslite si obrázok.)

Platí nasledujúca veta, ktorú uvedieme bez dôkazu.

Veta 3. Nech $\mathbf{M}$ je množina a d metrika na $\mathbf{M}$. Nech f je zobrazenie s definičným oborom $\langle 0, \infty)$ a s oborom hodnôt $\mathbf{R}$. Nech pre všetky $x, y \in \langle 0, \infty)$ platí:

(8) $\qquad \mathrm{f}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\,,$

(9) $\qquad x \leqq y \Rightarrow \mathrm{f}(x) \leqq \mathrm{f}(y)\,,$

(10) $\qquad$ f je konkávne.

Položme $\varrho(x, y) = \mathrm{f}(d(x, y))$. Potom ϱ je metrika na $\mathbf{M}$.

Nasledujúca veta (ktorej jednoduchý dôkaz prenechávame čitateľovi) poukazuje na to, že neklesajúcosť zobrazenia f nie je nutnou podmienkou na to, aby $\varrho(x, y) = \mathrm{f}(d(x, y))$ bola metrika na $\mathbf{M}$.

Veta 4. Nech $\mathbf{M}$ je množina a d metrika na $\mathbf{M}$. Nech f je zobrazenie s definičným oborom $\langle 0, \infty)$ a s oborom hodnôt $\mathbf{R}$. Nech platí

(11) $\qquad \mathrm{f}(0) = 0\,,$

(12) $\qquad$ existuje také reálne číslo $a > 0$, že pre každé x z intervalu $(0, \infty)$ platí $a \leqq \mathrm{f}(x) \leqq 2a$.

Položme $\varrho(x, y) = \mathrm{f}(d(x, y))$. Potom ϱ je metrika na množine $\mathbf{M}$.

Doteraz sme si ukazovali, ako možno pomocou vhodného zobrazenia f a metriky d na množine $\mathbf{M}$ definovať na tej istej množine $\mathbf{M}$ inú metriku. Teraz popíšeme inú metódu, ktorá nám umožní pomocou metriky d na množine $\mathbf{Q}$ a vhodného zobrazenia f množiny $\mathbf{P}$ do množiny $\mathbf{Q}$ definovať metriku ϱ na množine $\mathbf{P}$.

Hovoríme, že zobrazenie f množiny $\mathbf{P}$ do množiny $\mathbf{Q}$ je prosté, práve vtedy, keď pre každé $x, y \in \mathbf{P}$ platí

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(y) \Rightarrow x = y\,.$$

Veta 5. Nech f je prosté zobrazenie množiny $\mathbf{P}$ do množiny $\mathbf{Q}$. Nech d je metrika na množine $\mathbf{Q}$. Každej usporiadanej dvojici prvkov x, y z množiny $\mathbf{P}$ priraďme číslo $\varrho(x, y) = d(\mathrm{f}(x), \mathrm{f}(y))$. Potom ϱ je metrika na množine $\mathbf{P}$.

Dôkaz. Najskôr ukážeme vlastnosť (i). Nech $\varrho(x, y) = 0$. Potom $d(\mathrm{f}(x), \mathrm{f}(y)) = 0$. Pretože d je metrika, platí $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(y)$. Pretože f je prosté, platí $x = y$.

Nech teraz $x = y$. Potom $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(y)$. Pretože d je metrika, platí $\varrho(x, y) = d(\mathrm{f}(x), \mathrm{f}(y)) = 0$.

Teraz ukážeme vlastnosť (ii). Pretože d je metrika, platí $\varrho(x, y) = d(\mathrm{f}(x), \mathrm{f}(y)) = d(\mathrm{f}(y), \mathrm{f}(x)) = \varrho(y, x)$.

Nakoniec ukážeme vlastnosť (iii). Pretože d je metrika, platí $\varrho(x, z) = d(\mathrm{f}(x), \mathrm{f}(z)) \leqq d(\mathrm{f}(x), \mathrm{f}(y)) + d(\mathrm{f}(y), \mathrm{f}(z)) = \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Teda ϱ je metrika na množine $\mathbf{P}$.

Cvičenia

1. Overte, že zobrazenie f definované predpisom $f(x) = 3x - 2 . |x - 1| + |x - 2|$ pre každé x z intervalu $\langle 0, \infty)$, spĺňa podmienky (5), (6), (7), (8), (9), pritom však nie je konkávne.

2. Overte, že zobrazenie f definované predpisom $f(0) = 0$, $f(x) = |x - 1| - x + 3$ pre každé x z intervalu $(0, \infty)$, spĺňa podmienky (11), (12), ale nespĺňa (6).

3. Ukážte, že ϱ je metrika na množine reálnych čísel:

   a) $\varrho(x, y) = \left| \dfrac{x}{1 + |x|} - \dfrac{y}{1 + |y|} \right|$

   b) $\varrho(x, y) = [|x - y|] + 2$ pre $x \neq y$, $\varrho(x, x) = 0$
   (symbol $[a]$ znamená celú časť čísla a)

   c) $\varrho(x, x) = 0$,
   $\varrho(x, y) = 1$ ak $x \neq y$ a $x - y$ je racionálne číslo
   $\varrho(x, y) = 2$ ak $x \neq y$ a $x - y$ je iracionálne číslo

   d) $\varrho(x, y) = \log \left(1 + \dfrac{|x - y|}{\sqrt{1 + x^2} . \sqrt{1 + y^2}}\right).$

Literatúra

[1] P. Kostyrko — T. Šalát, Metrické priestory pre 3. ročník gymnázií s rozšíreným vyučovaním matematiky, SPN Bratislava 1976

[2] A. Kufner, Co asi nevíte o vzdálenosti, MLADÁ FRONTA Praha 1974